

1916.

No. 16.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 50. Heft 8.

DER GANZEN REIHE 355. BANDES 8. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT ZWEI TAFELN.



LEIPZIG, 1916.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.
(Ausgegeben am 5. September 1916.)*

Inhalt.

	Seite
1. L. Vegard. Nordlichtuntersuchungen. Über die physikalische Natur der kosmischen Strahlen, die das Nordlicht hervorrufen. (Hierzu Tafel IV.)	853
2. F. Paschen. Bohrs Heliumlinien. (Hierzu Tafel V.)	901
3. Fritz Küstner. Untersuchungen über den Schalldruck	941
4. Friedrich Kottler. Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation	955

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Seite

853

901

941

955

ren
ten
sse

in
zu

beit
ies
sen
en-

nd-
rist
et.

en
au-
en
au

tes
en
is,

lich
Nat
eine
kön
wei
nie
such

die
eine

Fra
ein
daß
Eig
in
Stre

Stre
väh
Los

Norv
1913

p. 2
A

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 50.

1. Nordlichtuntersuchungen.

Über die physikalische Natur der kosmischen Strahlen, die das Nordlicht hervorrufen;

von L. Vegard.

(Hierzu Tafel IV.)

§ 1. Problemstellung.

Vielleicht die wichtigste Aufgabe der heutigen Nordlichtforschung besteht in der Bestimmung der physikalischen Natur der kosmischen Strahlen; denn mit dieser Frage ist eine Reihe von anderen Untersuchungen eng verknüpft. So können wir z. B. mit Kenntnis der Strahlungsart möglicherweise wichtige Schlüsse über die Natur der Sonnenvorgänge ziehen, die bis jetzt meist nur auf optischem Wege untersucht worden sind.

Bekanntlich hat Birkeland¹⁾ die Ansicht vertreten, daß die Strahlen aus negativen Elektronen beständen und als eine Art von Kathodenstrahlen anzusehen seien.

In einigen früheren Veröffentlichungen²⁾ habe ich die Frage der Strahlungsart aufgeworfen und zum Gegenstand einiger Untersuchungen gemacht. Ich kam zu dem Resultat, daß die Annahme einer Strahlungsart mit den typischen Eigenschaften der α -Strahlen eine Reihe von Erscheinungen in einfacher Weise erklärte, während die Annahme von β -Strahlen zu erheblichen Schwierigkeiten führte.

Einige der wichtigsten Methoden, die zur Lösung der Strahlenfrage dienen können, habe ich schon in den erwähnten Arbeiten erörtert, und ich werde hier eine kurze Zusammenstellung der Hauptwege geben:

1) K. Birkeland, Expédition Norvégienne 1899—1900. The Norwegian Aurora Polar Expedition 1902/03. Kristiania 1908 (Section I) 1913 (Section II).

2) L. Vegard, Archiv f. mat. og nat. vidsk. Nr. 6 u. 9. 1911. Nature p. 212. 1911, Phil. Mag. Febr. 1912. Physik. Zeitschr. 14. p. 677. 1913.

1. Das Studium der geographischen Ausbreitung der Nordlichter.

2. Untersuchungen über die tägliche Variation des Nordlichtes.

3. Vergleich zwischen Nordlicht und magnetischen Störungen, um die magnetische Wirkung bestimmter Nordlichter zu erkennen.

4. Durch die Messung der elektrostatischen Influenzwirkung oder Änderung des Potentials ist vielleicht ein Mittel zur Erkenntnis des Zeichens der Strahlenladung gegeben.

5. Untersuchungen über die Höhe und Struktur des Nordlichtes im Hinblick auf die Gesetze der Absorption der bekannten elektrischen Strahlen. (Wenn man einen schraubenförmigen Nordlichtstrahl photographieren könnte, wäre nach Störmer¹⁾ das Zeichen der Ladung durch die Drehrichtung gegeben.)

6. Untersuchungen über das Nordlichtspektrum und Vergleich mit den durch elektrische Strahlen erzeugten Spektra.

Im folgenden werde ich suchen, einen Beitrag zur Nordlichttheorie zu geben, indem ich mich besonders mit denjenigen Fragen, die mit der Natur der Strahlen in Zusammenhang stehen, beschäftigen werde. Die Untersuchungen und die Resultate stützen sich größtenteils auf Beobachtungen und Messungen, die ich auf einer Expedition nach Bossekop (Alten) im Winter 1912/13 ausgeführt habe. Diese Expedition hatte als Hauptaufgabe das Studium des Nordlichtspektrums; da ich aber früher²⁾ die Resultate hiervon kurz mitgeteilt habe, werde ich hier auf die Spektraluntersuchungen nicht näher eingehen. Die verhältnismäßig komplizierten Fragen nach der täglichen Variation des Nordlichtes und deren Zusammenhang mit der Frage von der Natur der Strahlen werde ich auch nicht hier mitnehmen. Auf diese Fragen bin ich früher³⁾ eingegangen, und sie werden in meinem Bericht über die Ergebnisse der Expedition, der binnen kurzer Zeit erscheinen wird, wie auch die Spektraluntersuchungen ausführlicher behandelt werden.

1) C. Störmer, Arch. des sc. phys. et nat. 1911.

2) L. Vegard, Physik. Zeitschr. 14. p. 677. 1913.

3) L. Vegard, Phil. Mag. 1911.

§ 2. Die Beziehung zwischen Nordlicht und magnetischen Stürmen.

Da das Nordlicht aus elektrischen Strahlen besteht, wird es notwendigerweise magnetische Wirkungen ausüben, und es ist auch eine wohlbekannte Sache, daß starke Nordlichter gewöhnlich von magnetischen Störungen begleitet sind. Indessen ist es nicht gegeben, daß das Nordlicht immer die direkte Ursache des wesentlichen Teiles der störenden magnetischen Kraft ist. Schon während meiner ersten Arbeit über die Natur der Nordlichtstrahlen habe ich mir gedacht, daß diese zwei Erscheinungen zum Teil relativ selbständig sein könnten, und sogar den Gedanken entworfen, daß die magnetischen Perturbationen möglicherweise größtenteils von Kathodenstrahlen erzeugt sein könnten, während meiner Ansicht nach, die ich früher mehrmals dargelegt habe und die in dieser Abhandlung näher begründet werden wird, das Nordlicht von α -Strahlen hervorgerufen sein muß.

Wie sich die Sache verhält, kann man nur durch ein sorgfältiges Studium der Zusammengehörigkeit zwischen den beobachteten Nordlichtern und den gleichzeitig auftretenden magnetischen Perturbationen herausfinden.

Um womöglich einen Beitrag zum Verständnis dieses gegenseitigen Verhältnisses zwischen Nordlicht und magnetischen Stürmen zu liefern, habe ich vom Direktor des Haldeobservatoriums, Hrn. O. Krogness, eine Reihe von magnetischen Registrierungen für einen Teil der besten Nordlichtabende während meines Aufenthaltes in Bossekop bekommen.

Die ausgeliehenen Kurven sind in Fig. 1 wiedergegeben, und wir wollen kurz einen Vergleich zwischen den beobachteten Perturbationen und den beobachteten Nordlichtern anstellen.

Magnetogramm vom 4. bis 5. November; 8—12 p. m.

Schwache Perturbationen $8\frac{3}{4}$ —11; klar, kein Nordlicht.

Magnetogramm vom 5. bis 6. November; $6\frac{1}{2}$ —11 p. m.

Stark perturbiert bis 11. Leider fehlt der interessanteste Teil der Kurve, derjenige, der dem starken Bogen entspricht, welcher $5-6\frac{3}{4}$ auftrat. Den verhältnismäßig starken Perturbationen 7—8 entsprechen nur mittelstarke Bogen.

Magnetogramm vom 6. bis 7. November; 3 p. m. bis 3 a. m.

Eine stärkere Perturbation $3\frac{1}{2}$ —6. Zum Teil umwölkt; 6—7 Nordlicht hinter den Wolken, welches spektroskopisch erkannt werden kann; sonst kein Nordlicht bis Mitternacht.

Magnetogramm vom 9. bis 10. November; $8\frac{1}{2}$ p. m. bis 8 a. m.

Ziemlich starke Perturbation zwischen 11 p. m. und $2\frac{1}{4}$ a. m., sonst ruhig.

Das Nordlicht tritt um etwa $8\frac{1}{2}$ Uhr ein, mit einem schwachen Leuchten im Norden, das sich während des Abends hält. Um 11 Uhr wird das Nordlicht stärker; es treten im Westen Draperien auf, und einige Zeit nachher wird ein Bogen quer über den Himmel in einer Höhe von 80° über dem Horizont gebildet, gleichzeitig diffuses Leuchten im Zenit. Dieses Nordlicht hält sich fortdauernd, teils als Bogen im Westen, teils als flammende Nordlichter gegen den Zenit hinauf. Oft nimmt das Nordlicht die Form von vollständigen Bogen an; so gibt es 12 Uhr 30 bis 2 Uhr einen vollständigen Bogen quer über den Himmel, im Norden 70° vom Horizont. Der Bogen wird nach 2 Uhr immer schwächer, indem er nordwärts zieht, ist noch um $4\frac{1}{2}$ Uhr ganz lichtstark und steht nun in einer Höhe von 25 — 30° vom nördlichen Horizont.

Freilich erscheinen die stärksten Nordlichter in dem Zeitraum der magnetischen Störung; wir sehen aber auch, daß ganz starke Nordlichter vor 11 Uhr abends und nach $2\frac{1}{4}$ Uhr morgens zu einer Zeit, wo beinahe völlige magnetische Ruhe herrscht, auftreten.

Magnetogramm vom 10. bis 11. November; $4\frac{1}{4}$ p. m. bis 3 a. m.

Es tritt diesen Abend ein sehr starker magnetischer Sturm auf, der $6\frac{1}{4}$ beginnt, $8\frac{2}{3}$ sein Maximum erreicht und bis $10\frac{3}{4}$ dauert, wonach fast völlige Ruhe eintritt.

Schon um $4\frac{1}{2}$ Uhr nachmittags werden im Norden Draperiefragmente beobachtet, die besonders gegen Westen ziemlich stark sind. Es werden im Norden fortdauernd Bogen gebildet, die südwärts ziehen. Um 5 Uhr 35 wird im Osten eine Draperie gebildet, die südlich vom Zenit hinaufzieht. Zwischen 6 und $9\frac{1}{4}$ Uhr gibt es ein reiches Spiel von Nordlichtern in den verschiedensten Formen, nach $9\frac{1}{2}$ Uhr wieder bedeutend schwächer. Doch tritt etwa um 10 Uhr ein starker

Bogen auf, der sich fortdauernd hält, indem er immer schwächer wird, und um 2 Uhr 45 a. m. gibt es nur ein schwaches Leuchten im Norden.

Wenn wir die Variationen in der Stärke und Häufigkeit des Nordlichtes mit den magnetischen Kurven zusammenhalten, zeigen beide Erscheinungen diesen Abend einigermaßen den gleichen Verlauf. Jedenfalls kann man sagen, daß die stärkste Entfaltung des Nordlichtes in das Intervall fällt, wo die stärksten Perturbationen auftreten. Doch sind auch in diesem Falle bedeutende Verschiedenheiten im Verlaufe der beiden Erscheinungen vorhanden. So wurden starke Nordlichter zwischen 5 und 6 Uhr und noch stärker zwischen 6 und 7 Uhr beobachtet, während die Perturbationen noch relativ schwach waren. Von 9 Uhr 34 gibt es durchgehends schwache Nordlichter, die nur ganz langsam bis 3 Uhr morgens abnehmen. Um 9 Uhr 34 ist dagegen die magnetische Perturbation noch ziemlich stark, nimmt aber schnell ab, und von 10³/₄ Uhr an haben wir fast vollständige Ruhe. *Im Intervalle 9 Uhr 34 p. m. bis 3 Uhr a. m. verlaufen die beiden Erscheinungen ganz verschieden.*

Magnetogramm vom 9. bis 10. Dezember; 7¹/₄ p. m. bis 7 a. m.¹)

Die Kurven sind von 7¹/₄—9¹/₂ verhältnismäßig stark perturbirt, schwächer von 9¹/₂—11, wonach fast völlige Ruhe eintritt.

Um 6¹/₂ Uhr tritt ein Bogen im Norden auf, der etwa um 6³/₄ Uhr schärfer wird; um 7 Uhr sehr starker Bogen im Norden in 60° Höhe. Zwischen 7 und 8¹/₂ Uhr sehr starkes und prachtvolles Nordlicht (Draperiespiel), das also in die Zeit fällt, wo die Perturbationen am stärksten auftreten. Von 8¹/₂—9¹/₄ Uhr starker Bogen, der allmählich schwächer wird; hält sich noch um 2 Uhr morgens, ist aber zu dieser Zeit äußerst schwach. Diesen Abend verlaufen die beiden Erscheinungen einigermaßen parallel. Während des letzten Abschnittes, von 8¹/₂ bis 12 p. m., hört aber die Perturbation plötzlich als das Nordlicht auf. Der sehr schwache Bogen zwischen 11 und 12 Uhr scheint keine Wirkung ausgeübt zu haben.

1) Auf Fig. 1 sind für diesen Tag bei Zeichenfehler eine Strecke von 27 Minuten nach rechts verrückt.

Magnetogramm vom 10. bis 11. Dezember.

Eine verhältnismäßig kleine magnetische Störung zwischen 8 und 9 Uhr, übrigens fast ruhig.

Die Nordlichtverhältnisse sind dagegen diesen Abend fast dieselben wie am vorigen. Bogen ziehen um etwa $5\frac{1}{2}$ Uhr von Norden auf, nehmen an Stärke zu, sind noch bis 7 Uhr verhältnismäßig schwach; zu dieser Zeit wird der Bogen von Osten gegen Westen gewaltig stark. Nun folgt ein herrliches Draperiespiel, das bis etwa $8\frac{1}{2}$ Uhr dauert; dann geht das Ganze in ein schwaches, diffuses Leuchten, von Draperiefragmenten unterbrochen, über. Nach und nach nimmt das Nordlicht die Form eines schwachen Bogens im Norden an, der sich während der Nacht hält.

Hier haben wir den Fall, daß ein außerordentlich starkes und reiches Draperiespiel nur von sehr kleinen magnetischen Perturbationen begleitet ist. Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, daß in der Zeit zwischen $5\frac{1}{2}$ und 8 Uhr zum Teil *sehr starke und bewegliche Nordlichter auftraten, während gleichzeitig keine nennenswerten magnetischen Störungen zu beobachten waren.*

Magnetogramm vom 11. bis 12. Dezember; 3 p. m. bis 3 a. m.

Die Magnetogramme zeigen zum Teil starke Unruhe von $4\frac{1}{4}$ p. m. bis 2 a. m.; am stärksten von $6\frac{1}{4}$ —9 p. m.

Diese verhältnismäßig starke Unruhe ist vom Nordlicht begleitet, welches fast ohne Unterlaß von $3\frac{3}{4}$ p. m. bis zum nächsten Morgen dauert. Stellt man aber einen genauen Vergleich an, so zeigen sich wesentliche Nichtübereinstimmungen mit Rücksicht auf den Verlauf der beiden Erscheinungen. Das Nordlicht beginnt mit einem schwachen Bogen im Norden etwa um $3\frac{3}{4}$ Uhr; um $4\frac{1}{2}$ Uhr ist er verhältnismäßig stark. Der Bogen zieht südwärts, indem zuweilen mehrere parallele Bogen gebildet werden, die oft Draperieform annehmen. Um etwa $5\frac{1}{2}$ Uhr entfaltet sich ein prachtvolles Spiel der Nordlichter, welches etwa um $6\frac{1}{2}$ Uhr aufhört und ein diffuses Leuchten am Himmel hinterläßt. Bald nachher werden Bogen im Norden gebildet, die jedoch nur von mittlerer Stärke sind. Mit Ausnahme eines Draperiespiels um 9 Uhr, welches nur etwa 8 Minuten dauert, hält sich jetzt das Nordlicht mit abwechselnden, mittelstarken Bogen. Später am Abend nimmt

das Nordlicht mehr die Form eines ruhigen Bogens im Norden an, der sich fortwährend hält und noch um $3\frac{1}{4}$ Uhr nicht verschwunden ist. Das erste, das unsere Aufmerksamkeit auf sich zieht, ist die Tatsache, daß das kräftigste Nordlichtspiel um etwa $5\frac{1}{2}$ Uhr auftritt, zu einer Zeit, wo die magnetischen Perturbationen noch sehr klein sind. Während der stärksten magnetischen Unruhe, die von $6\frac{1}{2}$ —9 Uhr dauert, gibt es nur Nordlichtbogen von mittlerer Stärke. Weiter sollen wir bemerken, daß, obgleich die Nordlichtbogen schon um $3\frac{3}{4}$ Uhr nachmittags auftreten, die erste nennenswerte magnetische Störung doch erst um 4 Uhr 20 eintritt.

Es geht aus dem Vergleich hervor, was ja seit langem bekannt ist, daß Abende, die an starken Nordlichtern reich sind, auch starke magnetische Störungen aufweisen, und es ist oft so, daß die Zeit für die größte Stärke der magnetischen Stürme mit der Zeit für das reichste Nordlicht zusammenfällt. Doch zeigt ein genauerer Vergleich, daß die beiden Erscheinungen in ihrer Variation typische Verschiedenheiten zeigen, und es scheint, als ob die magnetischen Störungen oft ohne Rücksicht auf das Nordlicht verlaufen. Mitunter kann der stärkere Teil des Sturmes von mittelstarkem Nordlicht begleitet sein, wie es am 11. Dezember der Fall war; andererseits können starke Nordlichter vorhanden sein, ohne merkbare magnetische Wirkungen auszuüben.

Der erstere Fall ist vielleicht nicht so merkwürdig, und man kann daraus keine weiteren Schlüsse ziehen. Denn ein starker magnetischer Sturm braucht nicht durch dasjenige Nordlicht erzeugt zu sein, das über der Stelle erscheint, sondern durch fernerliegende Nordlichter.

Dagegen ist das Verhältnis, das nach dem Vorangehenden wiederholt beobachtet worden ist, daß starke Nordlichter gerade über dem Orte auftreten können, ohne merkbare magnetische Wirkungen hervorzurufen, eine Tatsache von weitreichender Bedeutung.

Es zeigt sich, daß nicht allein ruhige Bogen, sondern auch starke Draperiebildungen gerade über dem Orte auftreten können, ohne magnetische Störungen zu verursachen, die auf irgend eine Weise selbst mit den mittelstarken magnetischen Störungen in diesen Gegenden vergleichbar werden

können. Wir haben, mit anderen Worten, erfahrungsmäßig nachgewiesen, daß sehr starke Bogen und Draperien existieren, die auf die Oberfläche der Erde fast keine magnetische Wirkung ausüben, d. h. in einem Abstand vom unteren Rande des Nordlichtes von ca. 100—150 km.

Es ist aber nach dem, was wir vom Nordlicht wissen, kaum Grund anzunehmen, daß es nur diese speziellen Nordlichtformen, Bogen und Draperien sind, die sehr geringe magnetische Wirkung haben. Die ausgeführten Höhenmessungen haben gezeigt, daß die verschiedensten Nordlichtformen angenähert in der gleichen Höhe über der Oberfläche der Erde auftreten. Dies deutet darauf, daß eine Reihe der gewöhnlichsten Nordlichtformen mit Rücksicht auf ihre physikalische Ursache und die Art der sie erzeugenden Strahlen wesentlich gleichartig sind. Die Bogen und die Draperien, die die dominierenden Nordlichtformen ausmachen, zeigen im ganzen sehr konstante Eigenschaften: die typische Struktur und die gleichen Höhen über der Oberfläche der Erde. Nachdem wir so haben nachweisen können, daß typische Bogen und Draperien in mehreren Fällen gerade über dem Beobachtungsorte aufgetreten sind, ohne merkbare magnetische Wirkungen auszuüben, werden wir dadurch genötigt, den allgemeineren Schluß zu ziehen, daß das Nordlicht überhaupt nur verhältnismäßig geringe magnetische Wirkungen ausübt und zu den starken magnetischen Störungen nicht viel beiträgt.

Dieses Resultat wird auch dem Umstand, daß das Nordlicht und die magnetischen Stürme eine ganz verschiedene tägliche Variation zeigen, eine einfache Erklärung geben. Die Beobachtungen Birkelands vom Jahre 1902/03 geben für die magnetischen Stürme die folgende typische Variation: vormittags eine ruhige Periode, ein erstes Maximum nachmittags mit der perturbierenden Kraft gegen Nordwesten (positive Stürme), und dann ein sehr starkes Maximum um etwa 1 Uhr nachts, mit der perturbierenden Kraft gegen Süden gerichtet (negative Stürme). Im Gegensatz dazu habe ich früher¹⁾ gefunden, daß das Nordlicht über Bossekop ein ausgeprägtes Abendmaximum um etwa 9 Uhr hat, während etwa um 1 Uhr nachts ein Nordlichtminimum ist. Dies zeigt

1) L. Vegard, Phil. Mag. Febr. 1912. p. 220.

klar, daß die magnetischen Stürme von wesentlich anderen Stromsystemen bedingt sein müssen als diejenigen, die das Nordlicht erzeugen.

Der angestellte Vergleich zwischen dem Auftreten des Nordlichtes in Bossekop 1912/13 und den beobachteten magnetischen Störungen hat dargetan, daß nur ein unwesentlicher Teil der ganzen perturbierenden Kraft vom Nordlicht selbst herrührt. Gleichzeitig hat Birkeland durch seine eingehenden Untersuchungen über diejenigen Stromsysteme, die die magnetischen Stürme erzeugen, feststellen können, daß diese Ströme über der Erde gesucht werden müssen, gewöhnlich in einer Höhe von 200—400 km. Weiter hat Birkeland nachgewiesen, daß diejenigen Ströme, welche die polaren Stürme hervorrufen, innerhalb der Nordlichtzone auftreten.

Wir werden hierdurch zu der Annahme geleitet, daß der größte Teil der Perturbationen von Strömen kosmischer Strahlen erzeugt ist, die der Erde nicht so nahe kommen, daß sie Nordlicht hervorrufen können, indem sie außerhalb der Atmosphäre abbiegen. Mit Rücksicht auf die Art dieser Strahlen spricht doch viel zugunsten der Annahme, daß sowohl die Ströme außerhalb der Atmosphäre als auch das Nordlicht in vielen Fällen aus der gleichen Art von Strahlen bestehen. Erstens treten die Nordlichter wie auch die magnetischen Stürme innerhalb der Nordlichtzone am stärksten auf. Halten wir die kosmische Strahlungshypothese fest, wird dies bedeuten, daß sowohl die Strahlen, welche die höherliegenden Stromsysteme bilden, als auch die Nordlichtstrahlen die gleiche magnetische Ablenkbarkeit besitzen müssen. Sollte nun das Nordlicht von α -Strahlen gebildet sein, und die magnetischen Stürme von β -Strahlen, so müßten die letzteren eine bisher unbekannt geringe Ablenkbarkeit und große Durchdringlichkeit besitzen. Es ist aber in diesem Falle wenig wahrscheinlich, daß nicht auch β -Strahlen zuweilen Nordlicht verursachen würden. *Diese Nordlichter würden aber dann viel tiefer liegen als diejenigen, die man bisher gemessen hat.* Wenn das Nordlicht von α -Strahlen und die magnetischen Stürme hauptsächlich von β -Strahlen herrührten, müßte man endlich erwarten, daß das Nordlicht wegen der größeren Geschwindigkeit der β -Strahlen gewöhnlich ein paar Stunden nach dem magnetischen Sturm auftreten würde, unter der Annahme, daß die beiden Strahl-

sorten von einer Strahlquelle erzeugt wären. Oder wenn die Emission von der Sonne der beiden Strahlarten voneinander relativ unabhängig wäre, müßten wir erwarten, daß keine bestimmte Zusammengehörigkeit zwischen Nordlicht und magnetischen Stürmen stattfinden würde. Diese beiden Schlüsse widersprechen aber der Erfahrung, indem das Sachverhältnis durchgehends dasjenige ist, daß die Zeit für den stärksten Sturm gewöhnlich mit der Zeit für das kräftigste Nordlicht zusammenfällt, und nichts deutet darauf hin, daß das Nordlicht erst 2 Stunden später eintritt.

Die Sache scheint daher am einfachsten folgendermaßen erklärt werden zu können:

Sowohl die Nordlichter als auch die meisten magnetischen Stürme, mit ihrem Sturmzentrum in der Nordlichtzone, sind von der gleichen Art von Strahlen erzeugt. Die Hauptmasse der Strahlen, die gegen die Erde hereindringen, biegt ab, ehe sie die Atmosphäre trifft, und erzeugt kein Nordlicht, dagegen aber magnetische Störungen. Nur eine kleine Menge der Strahlen hat die richtigen Bahnen, kann tiefer in die Atmosphäre herabdringen und Nordlicht erzeugen. *Es sind daher die magnetischen Stürme, die für die Intensität des Niederschlags der elektrischen Strahlen wesentlich maßgebend werden, und in viel geringerem Grade das Nordlicht.* Wie erwähnt, haben die magnetischen Stürme in Bossekop ihr dominierendes Maximum kurz nach Mitternacht, d. h. zwischen 2 und 3 Uhr a. m. „nach magnetischer Lokalzeit“.¹⁾

Wir sehen hieraus, daß der kräftigste Niederschlag der elektrischen Strahlen frühmorgens fällt, und nicht, wie von Birkeland angenommen, am Abend. Birkeland findet nun durch Studium des Niederschlages der Kathodenstrahlen auf seine Terrella, daß, falls der stärkste Niederschlag am Abend fiel, dies ein sehr gewichtiges Argument zugunsten seiner Kathodenstrahlenhypothese sein würde. *Da wir nun gefunden haben, daß der stärkste Niederschlag frühmorgens eintritt, wird sein Argument mit dem gleichen Gewicht zugunsten der α -Strahlenhypothese ausfallen.*

Da das Nordlicht selbst nur geringe magnetische Wirkung ausübt, wird man kaum erwarten können, durch das Studium

1) Die „magnetische Lokalzeit“ bekommt man, wenn man die Rotationsachse der Erde mit der magnetischen Achse vertauscht.

der magnetischen Perturbationen eine Bestimmung der Natur der Strahlen zu bekommen. Störmer¹⁾ hat einen Versuch gemacht, das Zeichen der Ladung der Strahlen durch Vergleich mit magnetischen Stürmen herzuleiten, und er findet, daß die magnetische Wirkung einer positiven Ladung der Strahlen entsprechen sollte. Wie wir aber gesehen haben, wird die magnetische Wirkung des Nordlichtes von der Wirkung außerhalb liegender Stromsysteme gewöhnlich verdeckt werden, so daß man diesem Argument zugunsten der positiven Strahlen bis jetzt kaum Gewicht beilegen kann.

§ 8. Was uns die Ergebnisse der Höhenbestimmungen lehren mit Rücksicht auf die Natur der kosmischen Strahlen.

Die Höhenbestimmungen, die während meines Aufenthaltes in Bossekop vorgenommen wurden, und die ich früher zusammen mit dem Direktor des Halddeobservatoriums, Hrn. O. Krogness, veröffentlicht habe²⁾, zeigten, daß der untere Rand des Nordlichtes in Höhen liegt, die in irgend einem der beobachteten Fälle kaum kleiner als 90 km sind. Eine große Anzahl von Höhenbestimmungen, die etwas später (Frühling 1913) von Prof. Störmer angestellt worden sind, haben das gleiche Resultat gegeben. In Fällen, wo die Bestimmung mit großer Genauigkeit ausgeführt werden kann, wird man selten Höhen kleiner als ca. 100 km finden.

Ich habe in früheren Arbeiten³⁾ die Höhe des Nordlichtes auf Grundlage der α -Strahlentheorie berechnet. Diese Berechnungen setzen die Kenntnis der Zusammensetzung und der Dichte der Luft in den höheren Luftschichten voraus; diese sind aber tatsächlich wenig bekannt. Meinen Berechnungen legte ich die von Wegener angegebenen Drucke zugrunde, da diese jedenfalls die richtige Größenordnung geben können müssen. Es zeigte sich, daß die α -Strahlen in Höhen in einem Intervalle zwischen 100 und 200 km herabdringen würden. *Mit anderen Worten, die α -Strahlen geben Höhen der richtigen Größenordnung, und die α -Strahlentheorie steht*

1) C. Störmer, *Terrestrial Magnetism* 20. p. 1. 1915.

2) O. Krogness u. L. Vegard, Höhenbestimmungen des Nordlichtes usw., *Vid. selsk. Skr.*, Nr. 11. 1914.

3) L. Vegard, *Archiv f. mat. og nat. vidsk.*, Nr. 6. u. 9. 1911; *Phil. Mag.* Febr. 1912.

so mit den bisher vorgenommenen sicheren Höhenmessungen in bester Übereinstimmung.

Wie stellt sich nun das Verhältnis, wenn wir annehmen, das Nordlicht sei von Kathodenstrahlen erzeugt?

Aus der beobachteten Höhe der unteren Grenze des Nordlichtes können wir einen angenäherten Wert des Absorptionskoeffizienten des Nordlichtes berechnen. Die Gesetze für das Eindringen der Kathodenstrahlen in die Atmosphäre sind zuerst von Lenard näher untersucht¹⁾ worden, und später von Störmer.²⁾ Wir werden später auf diese Untersuchungen zurückkommen. Was uns in dieser Verbindung interessiert, ist, die Konstanten für diejenigen Kathodenstrahlen zu bestimmen, die zu einer Höhe von 100 km herabdringen würden. Wir finden dann aus Lenards und Störmers Berechnungen, daß die Kathodenstrahlen eine Geschwindigkeit von nur $1,42 \cdot 10^{10}$ cm/sec⁻¹ haben werden, und einen Wert des Produktes

$$H\rho = \frac{m}{e} v c$$

von 920 abs. Einh. Um die Höhe des Nordlichtes zu erklären, ist es deshalb notwendig, sehr weiche (leicht absorbierbare) Kathodenstrahlen anzunehmen.

Die Annahme von weichen Kathodenstrahlen als Ursache des Nordlichtes stößt aber auf große, ja, wie es scheint, fast unüberwindliche Schwierigkeiten, wenn wir die geographische Lage der Nordlichtzone erklären werden.

Dies geht sowohl aus Birkelands Experimenten als auch aus Störmers Berechnungen hervor. Um die Lage der Nordlichtzone auf Grundlage seiner Terrellaversuche erklären zu können, muß Birkeland Strahlen annehmen, für welche $H\rho = 3000000$, also ca. 3000mal größer als der Wert, der aus den Höhenmessungen abgeleitet worden ist.

Aus Störmers Formel für die geographische Lage des Nordlichtes³⁾ geht hervor, daß Kathodenstrahlen mit derjenigen Geschwindigkeit, die den beobachteten Nordlichthöhen ($H\rho = 920$) entspricht, für den angulären Abstand der

1) P. Lenard, Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1911.

2) C. Störmer, Arch. des sc. phys. et nat. 82. 1911.

3) Vgl. Arch. des sc. phys. et nat. 1907. p. 98.

Nordlichtzone von der magnetischen Achse einen Wert von $3,5^\circ$ geben, während der beobachtete Wert bekanntlich ca. 20° beträgt.

Um Übereinstimmung zustande zu bringen, muß eine der Voraussetzungen der Berechnungen aufgegeben werden. Wie ich früher gezeigt habe, wird die Annahme von α -Strahlen anstatt β -Strahlen befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung bringen.

Wenn man dagegen die Kathodenstrahlenhypothese festhalten will, muß man annehmen, daß das magnetische Feld der Erde von dem vorausgesetzten ganz verschieden ist. Die Berechnungen Störmers setzen voraus, daß die Erde in größeren Abständen als ein Elementarmagnet betrachtet werden kann. Dies ist in der Tat gleichwertig mit der Annahme, daß das magnetische Feld in der Erde oder in deren unmittelbarer Nähe seinen Sitz hat. Der Magnetismus kann entweder von Strömen im Innern der Materie von atomistischen oder molekularen Dimensionen erzeugt sein, oder von Strömen von größeren Dimensionen, nur müssen die Stromflächen nicht wesentlich größer als die Oberfläche der Erde sein. Die Verteilung des Magnetismus auf der Oberfläche der Erde, wie sie im Gaussischen Potential z. B. in den Formeln von Carlheim-Gyllenskjöld ihren Ausdruck gefunden hat, wird erst verhältnismäßig nahe der Erde merkbaren Einfluß bekommen; es muß aber von vornherein als wenig wahrscheinlich angesehen werden, daß dieser Einfluß so groß werden kann, daß die Nordlichtzone von einem Abstand von $3,5-20^\circ$ vorrücken kann.

Das Verhältnis ist von Störmer¹⁾ näher untersucht worden, und er findet auch, daß die Einführung dieser genaueren Werte des Feldes in den Bahnen der Strahlen keine wesentliche Änderung hervorruft.

Wollen wir das magnetische Feld auf eine Weise ändern, die die Form der Bahnen wesentlich ändern kann, so müssen wir annehmen, es treten Ströme auf, für welche die Stromflächen im Verhältnis zu der Oberfläche der Erde groß sind. Auch ein solcher Fall ist von Störmer²⁾ untersucht worden,

1) C. Störmer, Arch. des sc. phys. et nat. 32. 1911.

2) l. c.

indem er annimmt, daß ein Strom um die Erde im magnetischen Äquatorplan existiert. Er gelangt zu dem Resultat, daß bei angemessenen Werten vom Radius des Stromringes und von der Stromstärke im Verhältnis zur Ablenkbarkeit der Strahlen sogar die weichsten Kathodenstrahlen in die Nordlichtzone niederschlagen können. Indessen hat das vorläufig nur Interesse insofern, als es eine Möglichkeit zur Erklärung der Lage des Nordlichtes auf Grundlage der Kathodenstrahlenhypothese anweist. Wirkliche Bedeutung und wirkliches Gewicht bekommt aber eine solche Möglichkeit erst, wenn es nachgewiesen ist, daß die Annahme von einem solchen Stromring physikalisch zulässig ist, und ich werde daher im folgenden einen Beitrag zur Entscheidung dieser Frage geben.

§ 4. Über die Stabilität eines Stromringes rings um die Erde im magnetischen Äquatorplan.

Da der Stromring fern außen im Raume existieren soll, muß er aus kosmischen Strahlen bestehen, und da wir untersuchen wollen, ob die Kathodenstrahlen Nordlicht und magnetische Stürme erzeugen können, wollen wir annehmen, daß der Stromring aus Kathodenstrahlen besteht.

Nun wissen wir aus Erfahrung, daß selbst die schwächsten Nordlichter in der Nordlichtzone auftreten, und wir gelangen so zu dem Resultat, daß ein solcher Stromring permanent vorhanden sein muß in einer Stärke, die notwendig ist, um die Kathodenstrahlen in den richtigen Abstand von der magnetischen Achse herabzubringen.

Wenn wir annehmen, daß der Strom von Kathodenstrahlen gebildet ist von der gleichen Ablenkbarkeit wie derjenigen, die das Nordlicht erzeugen, zeigen die Berechnungen Störmers, daß der Stromring einen Radius von etwa 3000000 km und eine Stromstärke von 10^8 Amp. haben muß.

Es wird angenommen, daß dieser Stromring durch die ablenkende Wirkung des Erdmagnetismus im Gleichgewicht gehalten wird. Dagegen hat Störmer von der gegenseitigen elektrostatischen Wirkung zwischen den Elektronen abgesehen.

Wir wollen im folgenden die Wirkung der elektrostatischen Ladung untersuchen und werden nachweisen, daß mit denjenigen Bahnen und Stromstärken, die notwendig sind, um

im Falle von Kathodenstrahlen die Lage des Nordlichtes zu erklären, der Stromring nicht stabil sein wird, weil die elektrische Kraftwirkung im Verhältnis zur elektromagnetischen Kraft, die nach innen wirkt und das Elektron in seiner Bahn halten sollte, ganz dominierend werden wird.

Wir nehmen an, daß der Strom stationär ist. Es sei J die Stromstärke in absolutem elektromagnetischen Maß, σ die elektrostatische Ladung pro Längeneinheit und v die Geschwindigkeit der Elektronen. Wir haben dann

$$\sigma v = J c,$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Nehmen wir zuerst an, daß der Querschnitt des Stromringes im Verhältnis zum Radius der Strombahn so klein ist, daß wir den Strom als einen linearen Leiter betrachten dürfen. Ist der Radius des Stromkreises gleich A , so sollten wir haben

$$\frac{m v c}{e} = H A,$$

wo m und e die Masse und die Ladung des Elektrons ist, und H die magnetische Kraft, die das magnetische Feld der Erde an der Stelle, wo der Ring sich befindet, erzeugt. Da

$$H = \frac{M}{A^3},$$

wo M das magnetische Moment der Erde ist, bekommt man

$$A = \sqrt{\frac{M e}{m v c}}.$$

Jedes Elektron ist der elektrostatischen Abstoßung der sämtlichen übrigen Elektronen im Ringe ausgesetzt. Wenn wir annehmen, daß der Strom linear ist, oder ob man will, daß die Elektronen ihre Zentra auf derselben Kreisperipherie haben, wird die Resultante der sämtlichen Kräfte eine Kraft, die radial nach außen wirkt. Die elektrische Kraft eines Stromelementes dl , das in einem Abstand r vom Elemente liegt, ist $\sigma dl/r^2$, und die Komponente in radialer Richtung ist

$$dF = \frac{\sigma dl}{r^2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (\text{Vgl. Fig. 2.})$$

Aber

$$\frac{r}{2} = A \sin \frac{\alpha}{2},$$

also

$$dF = \frac{\sigma d \frac{\alpha}{2}}{2 A \sin \frac{\alpha}{2}}$$

und

$$F = \frac{\sigma}{A} \left[\log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right]_0^{\pi/2} = \infty.$$

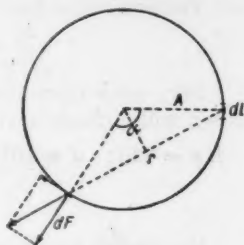


Fig. 2.

Wir sehen also, daß die Annahme von einer kontinuierlichen Verteilung der elektrischen Massen längs eines linearen Leiters in der Tat unmöglich ist, indem sie zu einer elektrostatischen Abstoßung führt, die unendlich groß wird. Diese große Abstoßung rührt von den elektrischen Massen, die das Elektron am nächsten umgeben, her. In der Tat wird die Kraft, die an dem einzelnen Elektron wirkt, durch die nächsten Umgebungen wesentlich bestimmt sein, also von der Elektronenverteilung im Stromquerschnitte und der Lage des Elektrons in diesem Querschnitte.

Um die Größenordnung der hier in Betracht kommenden Kräfte zu untersuchen, wollen wir zuerst für die Größe der Kraft, die von derjenigen Hälfte des Ringes herrührt, die dem betrachteten Elektron gerade gegenüberliegt, einen Ausdruck suchen. Diese Kraft wird von der Weise, auf welche die Elektronen im Stromquerschnitte verteilt sind, nicht wesentlich abhängen. Wir bekommen

$$F = \div \frac{\sigma}{A} \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

Oder wir können sagen, daß σ/A die Größenordnung der elektrischen Kraft gibt. Für die nach außen gerichtete mechanische Kraft K_e , die an dem Elektron wirkt, bekommen wir

$$K_e = e F = \frac{J e}{A v} e.$$

Die mechanische Kraft der elektromagnetischen Ablenkung ist

$$K_m = \frac{e M}{A^2} \cdot \frac{v}{c} = \frac{m v^2}{A}.$$

Folglich

$$\frac{K_e}{K_m} = \frac{J c e}{m v^3} = \frac{J}{H e} \left(\frac{c}{v} \right)^2.$$

Für denjenigen Stromring, der die Nordlichtzone erklären sollte, fanden wir

$$H e = 920; \quad J = 10^7 \text{ abs.}; \quad v = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}^{-1}, \text{ also}$$

$$\frac{K_e}{K_m} = 5 \cdot 10^4.$$

Die radial nach außen gerichtete Kraft, die von der elektrostatischen Kraftwirkung der ferner liegenden Teile des Stromringes herrührt, ist also mehr als 50000mal größer als die elektromagnetische Kraftwirkung, und ein Stromring, aus Kathodenstrahlen von derjenigen Stärke bestehend, die notwendig sein würde, um die Nordlichtzone auf ihren richtigen Platz zu bringen, kann also nicht bestehen.

Noch ungünstiger stellt sich das Verhältnis, wenn wir die Wirkung der am nächsten liegenden Teile des Stromringes untersuchen wollten. Wir können leicht die Größenordnung der Kräfte berechnen, die hier in Betracht kommen.

Wir nehmen an, daß der Stromring einen zirkularen Querschnitt hat, und wenn weiter sein Krümmungsradius im Verhältnis zum Radius des Querschnittes groß ist, wird die Kraft, die auf ein Elektron wirkt, insofern die Kraft von den am nächsten liegenden Partien abhängt, die gleiche wie für einen unendlich langen Zylinder. Es sei a der Abstand des Elektrons von der Zylinderachse. Wir wollen dann annehmen, daß die Dichte der Korpuskeln eine Funktion von a ist. Wir denken uns nun einen Zylinder mit Radius a um die Achse gelegt; innerhalb dieses Zylinders gibt es dann eine Elektrizitätsmenge σ_a pro Längeneinheit. Die radiale elektrische Kraft im Abstände a ist

$$F'_a = \frac{2 \sigma_a}{a}.$$

Die Kraft ist im Zentrum O und wächst mit a zu einem Maximum. Die Lage dieses Maximums wird von der Verteilung der elektrischen Massen abhängen. Wir betrachten nun ein Elektron, das in der Peripherie des Stromringes liegt, so daß der Zylinder durch das Elektron die Hauptmasse der Elektronen umschließt.

Für die am Elektron wirkende mechanische Kraft bekommt man

$$K_a' = F_e' e = \frac{2 \sigma_a e}{a} = \frac{2 J e e}{a v}.$$

Nun ist

$$K_m = \frac{H q v e}{A c},$$

wovon

$$\frac{K_a'}{K_m} = \frac{2 J}{H q} \left(\frac{e}{v} \right)^2 \frac{A}{a} = 10^5 \cdot \frac{A}{a}.$$

Da der Radius des Ringes viel größer als a sein muß, sehen wir, daß diejenigen elektrischen Kräfte, die von den näher liegenden Teilen des Ringes herrühren, im Verhältnis zu den von den ferneren Teilen des Ringes erzeugten Kräften gewöhnlich überwiegend werden, und nur für Elektronen, die in der Mitte des Stromringes liegen, wird die Wirkung des übrigen Stromringes die entscheidende werden. Die Kraft K_a' wird dazu wirken, die Elektronen in alle Richtungen zu zerstreuen, so daß sie sich zu einem Stromring nicht sammeln können. Dieser elektrostatischen Wirkung ist auch die gegenseitige magnetische Wirkung hinzuzufügen. Aber nur in dem Falle, daß die Kathodenstrahlen annähernd Lichtgeschwindigkeit besitzen, kann die elektromagnetische Wirkung von derselben Größenordnung wie die elektrostatische werden.

Ein Stromring, der permanent vorhanden sein und die Kathodenstrahlen so ablenken sollte, daß sie die Erde in der Nordlichtzone treffen, kann, wie wir sehen, nicht bestehen. Dagegen sehen wir, daß die Strahlen aufeinander eine starke Wirkung ausüben, und es ist sehr wohl möglich, daß diejenigen Felder, die während starker Perturbationen entstehen, dazu wirken können, die Strahlen von ihren normalen Bahnen abzulenken. Es scheint daher wahrscheinlich, daß Prof. Störmer recht hat, wenn er in der gegenseitigen Kraftwirkung zwischen den kosmischen Stromsystemen die Erklärung der Erscheinung findet, daß das Nordlicht und die magnetischen Strumzentra während starken magnetischen Stürmen südwärts rücken. Die Nordlichtzone ist als die Grenzlage für geringe Stärke anzusehen.

§ 5. Über die Lichtverteilung bei der Eindringung der α -Strahlen in die Atmosphäre.

Eine genaue Berechnung der Absorption der α -Strahlen in der Atmosphäre und das dadurch erzeugte Leuchten wird die Kenntnis folgender Verhältnisse voraussetzen.

1. Die Zusammensetzung der Luft als eine Funktion der Höhe über der Oberfläche der Erde.

2. Die Gesetze für die Absorption der α -Strahlen in verschiedenen Substanzen.

3. Die Gesetze für die Abhängigkeit der Lichtemission von der Geschwindigkeit der α -Strahlen und von der Art und Dichte des zu durchdringenden Stoffes.

Von diesen Verhältnissen sind es nur die Gesetze für die Absorption der α -Strahlen, von welchen wir sagen können, daß wir sie mit ausreichender Genauigkeit kennen.

Weiter werden wir sehen, daß wir auch für die Lichtemission längs der Strahlenbahn ein Gesetz aufstellen können, das den tatsächlichen Verhältnissen einigermaßen entsprechen wird. Die größte Schwierigkeit ist in unserer unvollkommenen Kenntnis der Zusammensetzung und der Dichte der Luft in den höchsten Luftschichten zu suchen. Aus der Verteilung in den tiefsten Schichten der Atmosphäre und unter Benutzung eines angenäherten Gesetzes für die Variation jedes einzelnen Gases mit der Höhe kann man, wie Wegener¹⁾ und Störmer²⁾ dargetan haben, gewisse Werte finden, die für den Druck derjenigen Gase, die in größeren Mengen an der Erdoberfläche vorkommen, die richtige Größenordnung geben werden. Dagegen wird für die leichtesten Gase, wie Helium, Wasserstoff und das hypothetische Geokoronium, die Berechnung ganz illusorisch.

In früheren Arbeiten³⁾ habe ich berechnet, wie tief hinab in die Atmosphäre die α -Strahlen dringen würden, wenn wir diejenigen Drucke annehmen könnten, die von Wegener angegeben sind, und es zeigt sich, daß sie zu Höhen herabreichen können, die zwischen 100 und 200 km liegen. Wie früher

1) A. Wegener, Physik. Zeitschr. 12. Nr. 5 u. 6. 1911.

2) C. Störmer, Arch. des sc. phys. et nat. 1911.

3) L. Vegard, Arch. f. mat. og nat. vidsk. Nr. 6. 1911; Nature 2163. p. 212. 1911; Phil. Mag. Febr. 1912. p. 217.

erwähnt, haben die bisher vorgenommenen Höhenmessungen von Nordlichtern Werte gegeben, die mit der α -Strahlenhypothese in bester Übereinstimmung stehen.

Solange wir aber über die Zusammensetzung der Atmosphäre in den höheren Schichten keine bessere Kenntnis haben, kann eine genaue Prüfung nicht unternommen werden.

Indem wir zur Untersuchung der Lichtverteilung bei α -Strahlen schreiten, werden wir daher folgendes Verfahren benutzen: Wenn das Nordlicht von α -Strahlen erzeugt ist, werden wir, wenn das Gas der höheren Luftschichten als bekannt vorausgesetzt wird, die Masse derjenigen Luftschicht berechnen können, die die Strahlen im ganzen durchdrungen haben, und mit Hilfe hiervon können wir dann die Verteilung weiter aufwärts vom unteren Rande des Nordlichtes angenähert berechnen. Wenn wir also die Art der Strahlen kennen, sollten wir durch die Höhe und Lichtverteilung des Nordlichtes auf die Dichte der Atmosphäre in den höheren Schichten schließen können, und möglicherweise haben wir gerade im Nordlicht das wichtigste Mittel zur „Gasanalyse“ der höheren Atmosphärenschichten.

Bestimmter wollen wir uns die Aufgabe so stellen:

Wir wollen denjenigen Druck B_0 (in Zentimeter Hg) berechnen, welcher in einer Höhe von 100 km über der Oberfläche der Erde existieren muß, damit α -Strahlen von Ra C durch die Atmosphäre aus dieser Höhe herabdringen können.

Wir wollen die Berechnung für folgende drei Fälle ausführen:

1. Der zu durchdringende Stoff ist gewöhnliche Luft;
2. „ „ „ „ „ Wasserstoff;
3. „ „ „ „ „ Geokoronium (?)

Berechnung der Drucke.

Wir denken uns, daß der α -Strahl einen geradlinigen Weg zurücklegt, und wir denken uns um den Strahl als Achse einen Zylinder mit dem Querschnitt 1 cm^2 gelegt. Die Masse dieses Zylinders wird

$$m = \frac{p}{g_m},$$

wo p der Druck in absolutem Maß am unteren Ende der Säule, g_m angenähert gleich der Beschleunigung der Schwere im

Schwerpunkt der Gassäule ist. Ist der Barometerstand am unteren Ende der Säule B_0 cm, so ist

$$(1) \quad p = S B_0 g_h,$$

wo S die Dichte des Quecksilbers, g_h die Beschleunigung der Schwere am unteren Ende der Säule ist, wo wir uns das Barometer angebracht denken. Da wir ohne merklichen Fehler $g_m = g_h$ setzen können, bekommen wir

$$(2) \quad m = S B_0.$$

Infolge der Gesetze für die Absorption der α -Strahlen ist die Masse pro Flächeneinheit der Schicht, die der Strahl durchdringt, unabhängig von der Dichte des Stoffes. Wenn ϱ die Dichte des Gases beim Atmosphärendruck und r die Reichweite des Strahles beim Atmosphärendruck ist, folgt

$$S B_0 = \varrho r.$$

Nach Braggs Gesetz von der Abhängigkeit des Absorptionsvermögens vom Atomgewichte wissen wir, daß Massenschichten von dem gleichen absorbierenden Vermögen sich zueinander wie die Quadratwurzel aus den Atomgewichten verhalten.¹⁾ Nennen wir diejenige Masse eines Stoffes mit Atomgewicht A , die nötig ist, um einen α -Strahl von Ra C zu absorbieren, m_A , so bekommen wir

$$(3) \quad \frac{m_A}{\sqrt{A}} = \frac{\varrho_0 r_0}{3,8},$$

wo ϱ_0 die Dichte und r_0 die Reichweite in Luft ist (die Luft wird als ein Stoff betrachtet, für welchen $\sqrt{A} = 3,8$)

$$m_A = \frac{\sqrt{A}}{3,8} \varrho_0 r_0 = S B_0,$$

wovon

$$(4) \quad B_0 = \frac{\sqrt{A}}{3,8 S} \varrho_0 r_0.$$

Aus Gleichung (4) wird der Druck des Gases in einer Höhe von 100 km berechnet.

Für Ra C haben wir $r_0 = 7,06$ cm. Das Atomgewicht des Geokoroniums ist nicht bekannt, da es ja überhaupt

1) W. H. Bragg und R. D. Kleemann, Phil. Mag. [6] 10. p. 318. 1905; H. Geiger, Proc. Roy. Soc. A. 83. p. 505. 1910.

zweifelhaft ist, ob der Stoff wirklich existiert. Nach Wegener sollte der Stoff leichter als Wasserstoff sein und die allerhöchsten Schichten der Atmosphäre bilden. Wir haben mit Wegener das Atomgewicht für Geokoronium gleich 0,4 gesetzt.

Wenn wir in den drei Fällen den Druck in einer Höhe von 100 km gefunden haben, können wir auch den Druck in größeren Höhen mit Hilfe der Barometerhöhenformel berechnen

$$(5) \quad B_h = B_0 e^{-\frac{T_0 \sigma}{T_h H_0} (h - h_0)},$$

wo B_h der Druck in der Höhe h und B_0 in der Höhe $h_0 = 100$ km ist. T_h ist die absolute Temperatur im Punkte h_0 , T_0 die absolute Temperatur bei 0°C ., σ ist die relative Dichte des Gases, $H_0 = 799100$.

Die Berechnung der Lichtverteilung längs der Strahlbahn.

Wir stellen uns jetzt die folgende Aufgabe: Ein α -Strahl von Ra C mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 dringt in die Atmosphäre herein. Wie wird die Lichtemission längs seiner Bahn variieren, bis er in einer Höhe von 100 km stecken bleibt? Auf dem Wege durch die Atmosphäre nimmt die Geschwindigkeit ab, da der Strahl einen Verlust kinetischer Energie erleidet, der wesentlich zur Ionisation des durchdrungenen Gases gebraucht wird.

Die Lichtintensität pro Längeneinheit der Bahn l wird für ein gegebenes Gas eine Funktion der Geschwindigkeit des Strahles und der Dichte des Gases sein.

$$(6) \quad l = \varphi(v, \rho).$$

Um die Lichtintensität berechnen zu können, müssen wir diese Funktion kennen. Es liegen keine direkten Messungen der Lichtemission der α -Strahlen vor; dagegen habe ich in einer Reihe von Experimenten, an der Universität Würzburg ausgeführt¹⁾, die Funktion für Kanalstrahlen ermittelt. Was hier in Betracht kommt, ist die sogenannte „ruhende Intensität“. Für diese fand ich in meinem Versuchsintervalle

$$(7) \quad l' = k \rho v^2.$$

1) L. Vegard, Lichterzeugung in Glimmlicht und Kanalstrahlen, Ann. d. Phys. 39. p. 111. 1912; 40. p. 711. 1913; 41. p. 625. 1913.

Wir müssen uns indessen in acht nehmen, diesem Resultat allgemeine Gültigkeit zu geben. Indem wir die Aufgabe für α -Strahlen lösen wollen, müssen wir uns erinnern, daß die Geschwindigkeit der α -Strahlen die zehnfache derjenigen der Kanalstrahlen ist, und vieles scheint darauf zu deuten, daß wenn die Geschwindigkeit der positiven Strahlen über einen Grenzwert 10^8 cm/sec⁻¹ wächst, d. h. diejenige Geschwindigkeit, die gewöhnliche Kanalstrahlen besitzen, die Strahlen ganz anderen Gesetzen folgen.

Diese Beschränkung der Gültigkeit des gefundenen Emissionsgesetzes gilt wesentlich der Geschwindigkeit. Dagegen müssen wir auch für α -Strahlen annehmen, daß bei einer gegebenen Geschwindigkeit die Lichtemission pro Längeneinheit der Dichte des Gases proportional ist. Dieses Gesetz muß jedenfalls für verhältnismäßig kleine Dichten als geltend angenommen werden können.

Mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der Lichtemission von der Geschwindigkeit kann man mit ziemlich großer Gewißheit annehmen, daß das Gesetz für α -Strahlen von demjenigen, das für Kanalstrahlen gefunden ist, ganz verschieden ist.

Ich habe schon in einer Reihe meiner früheren Arbeiten vorausgesetzt, daß die Lichtemission angenähert der Ionisation proportional gesetzt werden kann:

$$(8) \quad l = k, i.$$

Nun haben wir

$$(9a) \quad i = \varrho \varphi_1(v).$$

Wir können auch die Ionisation auf eine andere Weise ausdrücken. Haben wir einen Strahl von der Geschwindigkeit v_0 , der eine Schicht durchdrungen hat, einer Luftschicht (von 0° und 760 mm) von χ cm entsprechend, so wird einem bestimmten Wert von χ ein bestimmter Wert von v entsprechen. Wenn wir annehmen, daß r_0 die Reichweite in Luft ist, so können wir auch die Geschwindigkeit als eine Funktion von $(r_0 - \chi)$, der *restierenden Reichweite*, setzen und bekommen folglich

$$(9b) \quad \underline{i_h = \varrho_h \psi(r_0 - \chi)}.$$

Aus Untersuchungen von Bragg, Kleemann¹⁾ und Geiger²⁾ kennen wir die Ionisation pro Längeneinheit als Funktion von $(r_0 - x)$ für Luft von konstanter Dichte ϱ_0 , also

$$(9c) \quad \underline{i_0 = \varrho_0 \psi(r_0 - x)}.$$

Aus (9b) und (9c) bekommt man für die Ionisation pro Längeneinheit an der betrachteten Stelle

$$(10) \quad \underline{i_h = \frac{\varrho_h}{\varrho_0} i_0}.$$

Der Wert von i_0 für gegebenen Wert von x kann aus der experimentell gefundenen Kurve, die in Fig. 3 repräsentiert ist, ausgenommen werden.

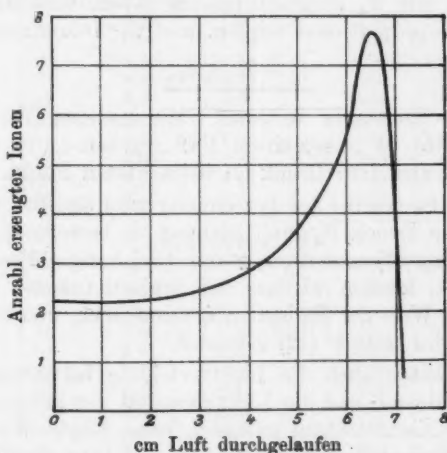


Fig. 3.

Nach Gleichung (8) wird die Ionisation, durch (10) bestimmt, relative Werte für die Lichtintensität geben. Zur Bestimmung der Lichtintensität in den verschiedenen Höhen werden also die Bestimmung der Dichte des Gases im Punkte ϱ_h und der Wert von x gefordert.

1) W. H. Bragg und R. D. Kleemann, l. c.

2) l. c.

Wenn der Druck des Gases in der Höhe h B_h cm Hg ist, so ist

$$\frac{\chi \varrho_0}{3,8} = \frac{B_h S}{\sqrt{A}},$$

nach (4)

$$(11) \quad \chi = \frac{B_h}{B_0} r_0.$$

Wir haben früher gesehen, wie wir B_h berechnen können. Die Dichte ist weiter durch den Ausdruck

$$\varrho_h = \varrho_0 \frac{T_0}{T_h} \cdot \frac{B_h}{T_0}$$

gegeben, wo ϱ_0 die Dichte bei T_0^0 und 76 cm Druck bedeutet. Da wir T_h konstant gesetzt haben, wird die Dichte dem Drucke proportional werden, und wir bekommen

$$(12) \quad l_h = K B_h i_0,$$

wo K eine Konstante bedeutet. Mit anderen Worten, die Lichtintensität ist in relativem Maß gegeben durch das Produkt von i_0 und dem Druck im betrachteten Punkt.

Das Verfahren bei der Berechnung wird also das folgende: Erst wird der Druck B_0 aus Gleichung (4) berechnet, dann B_h aus Gleichung (5) und dann χ aus Gleichung (11). Wenn χ gefunden ist, können wir aus der Ionisationskurve den entsprechenden Wert der Ionisation i_0 ausnehmen, und die Lichtintensität wird mittels (12) gefunden.

Wir konnten auch die Lichtverteilung bestimmen, unter der Voraussetzung, daß die Lichtintensität demjenigen Gesetz, das ich für Kanalstrahlen gefunden habe, folgt. Wir müssen dann die Geschwindigkeit des Strahles im betrachteten Punkt finden. Nach Geiger haben wir angenähert

$$v_h^2 = v_0^2 \frac{r_0 - \chi}{r_0}.$$

Die Lichtintensität pro Längeneinheit l_h' ist dann durch Gleichung (7) bestimmt:

$$l_h' = k \varrho_h v_h^2.$$

Das Resultat der Berechnungen ist in den folgenden Tabellen für Luft, Wasserstoff und Geokoronium gegeben.

Luft.

$h \cdot 10^5$ cm	B_h cm	χ	$q_h \text{ s}^{-1}$	i_0	l_h	l'_h
100	$6,71 \cdot 10^{-4}$	7,06 cm	$1,14 \cdot 10^{-8}$	0	0	0
100,52	$6,18 \cdot 10^{-4}$	6,50	$1,05 \cdot 10^{-8}$	760	1,00	0,52
105	$3,07 \cdot 10^{-4}$	3,23	$5,22 \cdot 10^{-9}$	248	0,16	0,93
110	$1,40 \cdot 10^{-4}$	1,47	$2,38 \cdot 10^{-9}$	227	0,068	0,55
115	$6,40 \cdot 10^{-5}$	0,67	$1,09 \cdot 10^{-9}$	225	0,031	0,28
120	$2,92 \cdot 10^{-5}$	0,31	$4,97 \cdot 10^{-10}$	225	0,014	0,13
150	$2,65 \cdot 10^{-7}$	0,003	$4,51 \cdot 10^{-12}$	225	0,00013	0,0012
200	$1,05 \cdot 10^{-10}$	0,000001	$1,79 \cdot 10^{-15}$	225	0,00000005	

Wasserstoff.

$h \cdot 10^5$ cm	B_h cm	χ	$q_h \text{ s}^{-1}$	i_0	l_h	l'_h
100	$1,77 \cdot 10^{-4}$	7,06 cm	$2,10 \cdot 10^{-10}$	0	0	0
105	1,67 „	6,68	1,99 „	710	0,96	0,41
107,6	1,63 „	6,50	1,93 „	760	1,00	0,52
110	1,58 „	6,33	1,88 „	700	0,90	0,60
115	1,50 „	5,99	1,78 „	550	0,67	0,74
120	1,42 „	5,68	1,69 „	468	0,53	0,83
130	1,27 „	5,09	1,51 „	370	0,38	0,94
140	1,14 „	4,56	1,36 „	318	0,29	0,990
150	1,02 „	4,09	1,22 „	285	0,24	0,994
175	$7,80 \cdot 10^{-5}$	3,11	$9,24 \cdot 10^{-11}$	245	0,16	0,91
200	5,93 „	2,37	7,03 „	233	0,11	0,78

Geokoronium.

$h \cdot 10^5$ cm	B_h cm	χ	$q_h \text{ s}^{-1}$	i_0	l_h	
100	$1,12 \cdot 10^{-4}$	7,06 cm	$2,63 \cdot 10^{-11}$	0	0*	
110	1,09 „	6,91	2,57 „	525	0,73	
120	1,07 „	6,76	2,51 „	670	0,92	
130	1,05 „	6,62	2,46 „	738	0,988	
138,2	1,029 „	6,50	2,42 „	760	1,000	
140	1,025 „	6,47	2,41 „	757	0,992	
150	1,00 „	6,34	2,36 „	700	0,90	
200	0,90 „	5,69	2,11 „	468	0,54	
300	0,73 „	4,58	1,70 „	320	0,30	
400	0,58 „	3,69	1,37 „	263	0,20	

In Kolonne 2 sind diejenigen Drucke angegeben, die in den verschiedenen Höhen existieren sollten, die in Kolonne 1 aufgeführt sind. Wir sehen, daß die Größenordnung desjenigen Druckes, der in einer Höhe von 100 km existieren sollte, mit der von Wegener angegebenen übereinstimmt.

$$1) s = \frac{T_h}{T_0}.$$

In Kolonne 3 sind die Werte von χ angegeben, die den verschiedenen Höhen entsprechen; in Kolonne 4 die Werte der Dichte in den verschiedenen Höhen. In Kolonne 5 sind relative Werte der Ionisation pro Längeneinheit aufgeführt, wenn der Strahl durch Luft von konstantem Druck, den Werten von χ entsprechend, geht. Die zwei letzten Kolonnen enthalten relative Werte der Lichtintensität pro Längeneinheit der

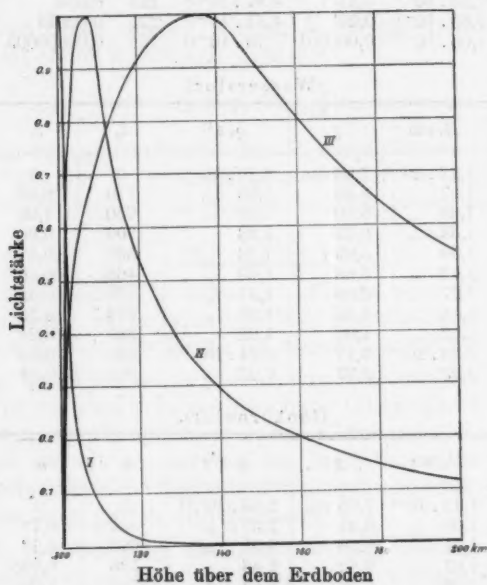


Fig. 4.

Bahn; l_h ist auf Grundlage der Proportionalität der Lichtintensität mit der Ionisation, l_h' auf Grundlage der für Kanalstrahlen geltenden Gesetze berechnet. Für Geokoronium habe ich mich damit begnügt, nur l_h zu berechnen.

Die Lichtverteilung ist in Figg. 4 u. 5 graphisch dargestellt. Die erste gibt l_h als Funktion der Höhe, die zweite gibt l_h' .

Vergleich mit beobachteten Verhältnissen.

Wir haben bei dieser Berechnung angenommen, daß sich die Strahlen geradlinig in die Atmosphäre bewegen, haben

also sowohl von der Zerstreuung als auch von der Ablenkung der Strahlen abgesehen. Diese beiden Faktoren können dazu wirken, die Verteilung zu ändern. Besonders wird das magnetische Feld die Strahlen dazu bringen können, krummlinige Bahnen anzunehmen, so daß sie höher oben in der Atmosphäre absorbiert werden, als wenn sie geradlinig gingen. Dies kann zur Folge haben, daß das Lichtmaximum höher

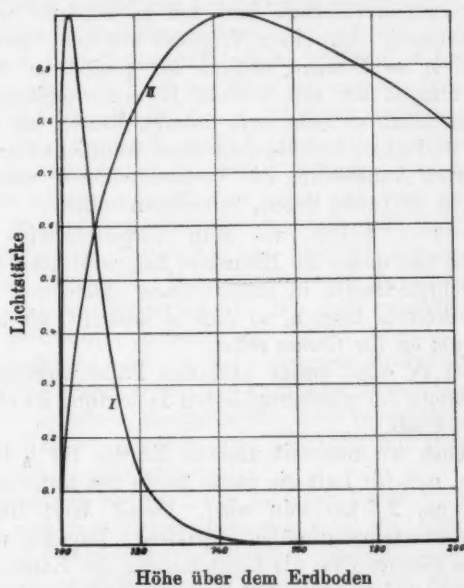


Fig. 5.

oben und ferner vom unteren Rande liegen kann, als es sonst der Fall sein würde. Ich nehme an, daß dies bei den *strahlenförmigen* Nordlichtern der Fall sein mag, die auf einer Strecke von mehr als 50 km ein fast gleichförmiges Leuchten zeigen können. Dies kann erklärt werden durch die Annahme, daß die Strahlen um die magnetischen Kraftlinien herumlaufen, und sogar zurückkehren können, ohne völlig absorbiert zu werden. Dies wird dann selbstverständlich die große Steigerung der Strahlenintensität in großen Höhen erklären können. Man sollte auch erwarten, daß die Strahlen weniger scharf ab-

wärts begrenzt seien, und daß ihre untere Begrenzung verhältnismäßig hoch liegen würde. Diese beiden Schlüsse stimmen mit den tatsächlichen Verhältnissen überein. Es ist eben für die strahlenförmigen Nordlichter typisch, daß ihre untere Begrenzung unbestimmt ist und daß ihre unterste observierbare Grenze höher liegt, als es bei den Bogen und Draperien der Fall ist.

Je geradliniger die Strahlen gehen, um so weiter rückt das Lichtmaximum abwärts und um so schärfer wird die untere Begrenzung. Um einen Vergleich mit dem berechneten Falle anstellen zu können, welcher für geradlinige Strahlen gültig ist, müssen wir mit solchen Formen vergleichen, wo das Lichtmaximum so nahe dem unteren Rande wie möglich auftritt, da diejenigen Strahlen, die diese Nordlichter erzeugen, mit der besten Annäherung die Voraussetzungen, welche den Berechnungen zugrunde liegen, befriedigen sollten.

In einzelnen Fällen, wo man draperieförmige Bogen einigermaßen tief unten im Horizonte hat, wird man tatsächlich das Lichtmaximum in unmittelbarer Nähe des unteren Randes beobachten können, so daß es aussieht, als läge das Lichtmaximum an der Grenze selbst.

In Tafel IV sind einige derartige Fälle wiedergegeben. Die ganze Breite der photographierten Leuchtung ist oft nicht mehr als 5—8 km.

Vergleichen wir nun mit unseren Kurven für l_h (Fig. 4), so sehen wir, daß für Luft die ganze Breite des unteren Lichtgürtels nur ca. 2,5 km sein wird. Dieser Wert ist etwas kleiner als der erfahrungsmäßig gefundene. Dagegen wird l'_h , der nach den Gesetzen für die Lichtemission der Kanalstrahlen berechnet worden ist, eine Breite von ca. 15 km geben. Wie wir sehen, ist aber dieser Wert zu groß, und wir gelangen also auch auf diese Weise zu dem Resultat, daß die Gesetze für die Lichtgebung der Kanalstrahlen für die Geschwindigkeit der α -Strahlen nicht gültig sein können. Wir werden uns deshalb im folgenden nur an l_h halten. Für reinen Wasserstoff sollte die Lichtintensität ca. 8 km über dem unteren Rande ihr Maximum haben und sollte in einer Höhe von 40 km über dem unteren Rande auf ein Drittel dieses Wertes gesunken sein. Für Geokoronium sollte das Maximum der Lichtintensität in einer Höhe von 38 km über dem unteren Rande liegen, und erst in einer Höhe von 120 km über dem

unteren Rande sollte die Lichtintensität auf die Hälfte dieses Maximalbetrages gesunken sein.

Aus dem Umstand, daß Nordlichter mit einer Leuchtungs-
höhe von nur 5—8 km und mit dem Maximum der Lichtintensität
dicht an der unteren Grenze existieren, können wir den sehr
wichtigen Schluß ziehen, daß die höheren Atmosphärenschichten
nur verhältnismäßig kleine Mengen der leichteren Gase, Wasser-
stoff und noch weniger von Geokoronium (wenn dieser Stoff über-
haupt existiert), enthalten können.¹⁾ Denn ein dominierender
Bestandteil von Wasserstoff müßte ergeben, daß das Licht-
maximum nie tiefer als 8 km über den unteren Rand kommen
könnte, und die Breite des Lichtgürtels müßte mindestens
40 km sein. Dagegen wird Helium eine passendere Ver-
teilung der Lichtintensität geben können. Das tatsächliche
Verhältnis scheint dasjenige zu sein, daß man auch in den
höheren Atmosphärenschichten die Luft oder den Stickstoff
als dominierenden Bestandteil hat, aber mit einigen der leicht-
eren Gase gemischt. Das letztere wird bewirken, daß der
Lichtgürtel etwas breiter würde. Bei einer eventuellen quanti-
tativen Beurteilung müssen wir jedoch beachten, daß die-
jenige Leuchtung, die die verschiedenen Komponenten einer
Gasmischung erzeugen, mit der Anzahl der Moleküle pro Volum-
einheit der einzelnen Komponenten nicht proportional ist. Wir
wissen so, daß Stickstoff in einer Mischung mit anderen Gasen
verhältnismäßig stärker leuchtet.

Es wird nun für die Frage nach der Natur der kosmischen
Strahlen von besonderem Interesse sein, die Lichtverteilung
auch für β -Strahlen zu untersuchen. Berechnungen über die
Absorption der β -Strahlen in der Atmosphäre sind von Le-
nard²⁾ und Störmer³⁾ ausgeführt. Diese Berechnungen
setzen voraus, daß die Zerstreuung außer Betracht gesetzt
werden kann, eine Annahme, die für β -Strahlen kaum statt-
haft ist. Wenn die Zerstreuung in Betracht gezogen würde,
würde dies bewirken, daß das Nordlicht auf ein größeres Ge-
biet verteilt würde, und außerdem würde die Absorption in
den höheren Schichten verhältnismäßig größer sein.

1) Es ist doch zu bemerken, daß die Höhe des Leuchtens von der
angenommenen Temperatur abhängen wird.

2) P. Lenard, Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1911.

3) C. Störmer, Arch. des sc. phys. et nat. 1911.

Nehmen wir indessen an, daß die Absorption durch die Formeln von Lenard und Störmer gegeben ist. In diesen Formeln ist die Strahlenintensität als Funktion der Höhe über der Erdoberfläche gegeben. Nennen wir die ursprüngliche Intensität J_0 in der Höhe h J_h , so haben wir

$$J_h = J_0 f(h),$$

wo $f(h)$ eine bekannte Funktion ist. Lenards und Störmers Kurven für $f(h)$ sind in Fig. 6, Kurve I, wiedergegeben.

Die nächste Frage wird nun sein, wie man, wenn die Absorptionskurven bekannt sind, die Lichtemission finden kann.

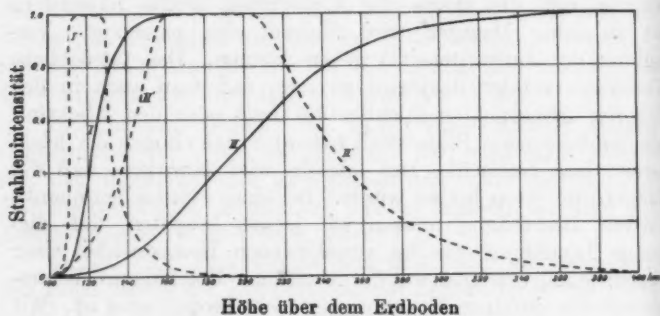


Fig. 6.

Die wahrscheinlichste Annahme ist diejenige, daß die Lichtemission pro Längeneinheit mit der pro Längeneinheit absorbierten Strahlenenergie proportional ist. Nennen wir die Lichtintensität pro Längeneinheit l_k , so bekommen wir

$$l_k = k \frac{dJ_h}{dh}.$$

Die Lichtstärke in relativem Maß sollte also durch die Tangente der Intensitätskurve gegeben sein. Aus Lenards Kurve für Luft sehen wir sogleich, daß für Strahlen, die zu einer Höhe von 100 km herabreichen, die Lichtintensität erst bei den ersten 10 km langsam wachsen wird, dann einen Maximalwert erreicht, der sich bei ca. 25 km konstant halten wird, worauf die Lichtintensität fast ebenso rasch abnimmt und in einer Höhe von 180 km sehr nahe Null wird (Fig. 5, Kurve I'). Wenn wir uns nun erinnern, daß die Berechnung für reine

Luft gilt, und daß man von der Zerstreuung abgesehen hat, wird die hier berechnete Länge der starken Leuchtung ein Minimum der Leuchtung längs eines Nordlichtstrahles repräsentieren. Nun wissen wir aber, daß Nordlichter vorkommen, wo das Maximum der Lichtintensität in unmittelbarer Nähe der unteren Grenze liegt, und wo die Breite der ganzen Leuchtung nur 5—8 km beträgt. Die auf Grundlage der Kathodenstrahlenshypothese gefundene minimale Breite, ca. 30 km, ist also ca. 5mal zu groß.

Noch ungünstiger für die Kathodenstrahlen stellt sich die Sache, wenn wir annehmen, daß in den höchsten Schichten der Atmosphäre auch leichtere Gase vorkommen.

Störmer hat auf Grundlage der von Wegener angegebenen Zusammensetzung der Atmosphäre die Absorptionskurve berechnet. Betrachten wir die Kurven für diejenigen Strahlen, die zu einer Höhe von 100 km herabreichen (Fig. 5, II und II'). Die Lichtintensität wird hier die ersten 30 km wachsen, dann die folgenden 120 km stark und beinahe konstant sein, um erst in einer Höhe von ca. 300 km verschwindend zu werden. Wir ersehen, daß eine solche Lichtverteilung unmöglich diejenigen Formen des Nordlichtes erklären kann, wo der Abstand zwischen oberem und unterem Rand nur 5—8 km ist.

Unsere Untersuchung über die Lichtverteilung hat also das Resultat ergeben, daß diejenigen Nordlichter, die eine besonders scharfe untere Begrenzung und kleinen Abstand zwischen unterem und oberem Rande zeigen, durch die α -Strahlenshypothese völlig befriedigend erklärt werden. Dagegen geben die Kathodenstrahlen zu großen Abstand zwischen unterem und oberem Rande und werden dem Nordlicht die hinreichend scharfe Begrenzung abwärts nicht geben können. *Diese genaue Analyse der Lichtverteilung hat also meine früheren Annahmen durchaus bestätigt.*

§ 6. Homogene Strahlgruppen.

In meinen früheren Arbeiten gelangte ich zu dem Resultat, daß diejenigen Strahlen, die ein Band erzeugten, homogen sein müßten. Dies ist eine notwendige Folge der kosmischen Strahlungshypothese; denn damit sich die Strahlen in einem schmalen Band längs der magnetischen Parallelen sammeln

können, müssen sie die gleiche magnetische Ablenkbarkeit besitzen. Weiter ist es notwendig, um diejenigen Nordlichter, die ihr Lichtmaximum in unmittelbarer Nähe des unteren Randes haben, zu erklären, völlig homogene Strahlen anzunehmen.

Die parallelen Bänder können dagegen verschiedenen Ursprung haben. Ich werde die drei wichtigsten Ursachen erwähnen:

1. Zwei parallele Bänder können Strahlbündeln entsprechen, die auf ihrem Weg von der Sonne wesentlich verschiedene Bahnen zurückgelegt haben. Man könnte z. B. annehmen, daß ein Band (das nördlichste) Strahlen entspricht, für welche der Windungswinkel um die magnetische Achse $\psi < 360^\circ$ ist, während für die das südlichere Band erzeugenden Strahlen $360 < \psi < 720$ gilt.

2. Die verschiedenen Bänder rühren von verschiedenen Quellen der Sonnenoberfläche her. Ich habe gedacht, daß eine Reihe der plisséformigen Bogen und Zonen, die in eine große Anzahl paralleler Bänder mit unregelmäßigen Zwischenräumen gespalten sind, auf diese Weise erklärt werden können.

3. Die verschiedenen Bänder können von Strahlen verschiedener magnetischer Ablenkbarkeit erzeugt sein. Ich habe früher den Gedanken ausgesprochen, daß diejenigen regelmäßigen, parallelen Bogen und Draperien, die verhältnismäßig großen Abstand voneinander haben, durch die Annahme erklärt werden können, daß die Sonne Gruppen homogener Strahlen aussendet, und ich machte gleichzeitig darauf aufmerksam, daß die Existenz derartiger homogenen Gruppen eine notwendige Folge der α -Strahlentheorie sei; denn solche Gruppen werden bei der Desintegration einer radioaktiven Substanz gebildet.

Einer verschiedenen magnetischen Ablenkbarkeit entspricht eine verschiedene Durchdringungsfähigkeit, und wir müssen so erwarten, für den unteren Rand des Nordlichtes eine Reihe konstanter Höhen zu finden, jede Höhe einer bestimmten Strahlenart entsprechend. Dies Verhältnis ist durch meine früheren Berechnungen über die Absorption der α -Strahlen in der Atmosphäre¹⁾ veranschaulicht.

1) L. Vegard, Arch. f. mat. og nat. vidsk. Nr. 6. 1911; Phil. Mag. Febr. 1912. p. 218.

Mit Hilfe der Höhenmessungen sollte also die Frage von der Existenz scharf getrennter, homogener Strahlgruppen entschieden werden können. Doch müssen wir darauf achten, daß die Höhenmessungen, besonders was die diffuseren Formen betrifft, mit Fehlern behaftet sein können, die ebenso groß sind wie die Höhendifferenzen zwischen Nordlichtern, die von den verschiedenen Strahlgruppen erzeugt sind. Weiter werden einzelne Nordlichter von α -Strahlen gebildet, die sich nicht geradlinig bewegt haben, sondern um die magnetischen Kraftlinien herum, wie es z. B. bei den strahlenförmigen Nordlichtern der Fall sein mag. Dies bewirkt, daß die untere Grenze undeutlicher und höher hinauf gezogen wird. Bei Untersuchungen über die Existenz von homogenen Strahlgruppen sollen wir uns deshalb vorzugsweise an diejenigen Formen halten, die einen scharfen unteren Rand haben mit dem Lichtmaximum in unmittelbarer Nähe desselben.

Ohne solche Vorsichtsmaßregeln wird die Gesetzmäßigkeit leicht aufgewischt werden. Man sollte jedoch erwarten, daß wenn ein bedeutendes Material von Höhenmessungen zur Verfügung stünde, gewisse Höhen eine maximale Häufigkeit aufweisen würden, den homogenen Strahlgruppen entsprechend.

Diejenigen Messungen, die ich während meiner Expedition zusammen mit Hrn. Krogness vornahm, waren zu wenig, um daraus Schlüsse über die Existenz homogener Strahlgruppen ziehen zu können. Dagegen hat Störmer etwas später (Frühling 1913) ein bedeutend größeres Material gesammelt, und seine Resultate deuten auf die Existenz gewisser Höhen mit maximaler Häufigkeit des Nordlichtes.¹⁾ Zurzeit habe ich zusammen mit Direktor Krogness ein großes Material unter Bearbeitung, mehrere Hunderte der am Halddeobservatorium aufgenommene Parallaxebilder umfassend. Ich habe die Hoffnung, daß dieses Material auch mit Rücksicht auf die Existenz homogener Strahlgruppen wichtige Aufschlüsse geben wird.

Wenn es sich zeigt, daß derartige bestimmte homogene Strahlgruppen mit bestimmter, unveränderlicher Durchdringungsfähigkeit existieren, so ist dies eine außerordentlich bedeutungsvolle Tatsache, und ich habe früher darauf aufmerksam gemacht, daß wir hierdurch zu der Annahme fast

1) C. Störmer, Compt. rend. 102. p. 390. 1916.

genötigt werden, daß die Strahlen von radioaktiven Substanzen herrühren. Denn es wird kaum zu erklären möglich sein, wie solche streng homogene Gruppen durch eine Form von elektrischer Entladung entstehen können. Unter keinen Umständen scheint das Nordlicht, das diesen konstanten Höhen entspricht, von Kathoden- oder β -Strahlen herrühren zu können. Wenn wir annehmen, daß die Elektronen durch ein elektrisches Feld auf der Sonne oder durch ein Feld, das die Sonne umgibt, ihre Geschwindigkeit bekamen, könnte es wohl denkbar sein, daß homogene Strahlgruppen erzeugt werden, aber nicht mehrere homogene Gruppen. Dagegen könnte die Möglichkeit vorhanden sein, daß die homogenen Gruppen von elektrischer Entladung *positiver* Strahlen erzeugt sein könnten. Wenn verschiedene Atomsorten ein oder mehrere Elektronen verlieren und sämtlich dasselbe elektrische Feld durchlaufen, scheint es wahrscheinlich zu sein, daß homogene Strahlgruppen positiver Strahlen auftreten können, wo jede Gruppe ihre bestimmte Durchdringungsfähigkeit hat. Vom Studium der positiven Strahlen in Entladungsröhren (Kanalstrahlen) wissen wir, daß diese gewöhnlichen Atomstrahlen fortdauernden Umladungen ausgesetzt sind. Dies hat bekanntlich zur Folge, daß die Strahlen nicht homogen werden; jeder Sorte der Strahlträger werden Geschwindigkeiten erteilt, die zwischen verhältnismäßig weiten Grenzen kontinuierlich variieren. Derartige Strahlen können deshalb die äußerst scharfen Bänder und die Draperien mit der scharfen unteren Begrenzung nicht erklären.

Wenn wir auch die Strahlen durch radioaktive Prozesse gebildet annehmen, können wir β -Strahlen nicht annehmen. Wie von Rutherford u. a. gezeigt wurde, senden die radioaktiven Substanzen β -Strahlen aus, die aus einer großen Anzahl homogener Büschel zusammengesetzt sind. Die Strahlen geben ein magnetisches Spektrum aus einer großen Anzahl dicht beieinander liegender Linien bestehend. Da die Anzahl der Strahlensorten außerordentlich groß ist und der Unterschied der Geschwindigkeiten so verhältnismäßig klein, werden wir durch diese Strahlen die Existenz einer kleinen Anzahl wohl getrennter Höhen maximaler Nordlichthäufigkeit nicht erklären können. Wegen des kleinen Unterschiedes der Geschwindigkeiten würden sie aber zu einer großen Anzahl von Maximal-

höhen Anlaß geben, die jedoch so dicht aneinander liegen würden, daß sie sich kaum durch Beobachtung nachweisen ließen, wenn wir die verhältnismäßig großen Fehler, mit welchen die Nordlichtbestimmungen behaftet sind, in Betracht ziehen. Von verschiedenen anderen Verhältnissen abgesehen, die die Annahme von β -Strahlen unwahrscheinlich machen, besitzen die β -Strahlen von radioaktiven Substanzen eine zu große Durchdringungsfähigkeit, um die beobachteten Nordlichthöhen erklären zu können; denn nach Lenard würden gewöhnliche β -Strahlen zu einer Höhe von ca. 57 km herabreichen, während der untere Rand des Nordlichtes durchgehend in Höhen größer als 100 km liegt.

Wenn es also durch nähere Untersuchungen bestätigt werden sollte, daß bestimmte Höhen mit maximaler Häufigkeit des Nordlichtes wirklich existieren, führt dies mit fast zwingender Notwendigkeit zu der Annahme, daß das Nordlicht durch α -Strahlen von radioaktiven Substanzen erzeugt ist.

Die Tatsache, daß die Strahlen auf ihrem Weg von der Sonne nach der Erde ihre Homogenität beibehalten und ganz dünne Draperien bilden, ist an sich ein wichtiges Argument zugunsten der α -Strahlenhypothese; denn Kathodenstrahlen von der passenden Durchdringungsfähigkeit sind so leicht ablenkbar und ihre Geschwindigkeit ist so leicht beeinflussbar, daß sie durch das Entstehen von elektrokinetischer Energie und durch gegenseitige elektrostatische Kraftwirkung der Stromsysteme ihre Homogenität verlieren würden. Weiter sollte man erwarten, daß die gegenseitige elektrostatische Abstoßung der Strahlen (wegen der großen Ablenkbarkeit) die Bildung von dünnen Draperien verhindern müßte.

§ 7. Der elektrische Zustand der Sonne.

Aus den gemessenen Nordlichthöhen können wir auch wichtige Schlüsse mit Rücksicht auf den elektrischen Zustand der Sonne ziehen.

Gleichgültig, ob wir positive oder negative Strahlen annehmen: das elektrische Feld, das die Strahlen auf ihrem Weg von der Sonne bis zu einem Punkt fern außen im Raume im ganzen passieren, muß verhältnismäßig klein sein. Kathodenstrahlen, die bis zu einer Höhe von 100 km herab-

reichen sollten, würden eine Geschwindigkeit von $1,4 \cdot 10^{10}$ cm/sec⁻¹ bekommen und ein Potential von nur 60000 Volt fordern. Indessen haben wir gesehen, daß das Nordlicht zweifellos aus positiven Strahlen gebildet werden muß, deren Geschwindigkeit und Durchdringungsfähigkeit denjenigen der bekannten α -Strahlen von radioaktiven Substanzen entsprechen. Wahrscheinlich rühren auch die elektrischen Sonnenstrahlen von radioaktiven Stoffen her, und der Strahl wird dann schon die hinreichende Geschwindigkeit besitzen, wenn er das desintegrierte Atom verläßt. In diesem Falle braucht die Sonne überhaupt kein elektrisches Feld zu besitzen. Indessen ist nichts im Wege, daß die Sonne ein elektrisches Feld besitzen mag, das hinreichend stark ist, einer α -Partikel eine Geschwindigkeit zu erteilen, die von der gleichen Größenordnung ist wie diejenige, die ihr ursprünglich bei der Explosion des Atoms erteilt wurde. Das elektrische Potential der Sonne sollte daher die Größenordnung $4 \cdot 10^6$ Volt oder 18600 abs. elektromagn. Einh., die notwendig sein würde, um einer α -Partikel eine Geschwindigkeit von $2 \cdot 10^9$ cm/sec⁻¹ zu erteilen, nicht überschreiten können. Wenn wir annehmen, daß etwaiges Potential von Ladungen nahe der Oberfläche der Sonne in einem Abstand R von ihrem Zentrum herrührte, so würde die elektrische Kraft durch den Ausdruck

$$F = \frac{V}{R}$$

bestimmt sein, wo V das Potential nahe der Oberfläche der Sonne ist. Setzen wir $R = 7 \cdot 10^{10}$ cm, so bekommen wir

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ abs. elektrost. Einh.}$$

Wir sehen also, daß die elektrische Kraft im Hauptfeld der Sonne selbst an der Oberfläche äußerst gering sein muß.

Dieses Resultat stimmt mit den Schlüssen überein, die man durch Untersuchungen über den Starkeffekt auf der Sonne hat ziehen können. Prof. Stark machte vor ein paar Jahren die bedeutungsvolle Entdeckung, daß die Spektrallinien, und besonders die Serienlinien der leichten Elemente, durch ein elektrisches Feld gespalten werden. Bekanntlich ist es Prof. Hale an dem Mount Wilson Observatorium gelungen, den Nachweis zu führen, daß die Emissionszentra der Linienspektren des Sonnenspektrums der Wirkung magnetischer

Felder unterworfen sind, die besonders in den Sonnenflecken stark sind. Dies deutet auf die Existenz starker elektrischer Ströme auf der Sonne. Sollten nun diese Ströme aus einsbenannten elektrischen Strahlen (entweder positiv oder negativ) bestehen, so würde man gleichzeitig starke elektrische Felder haben müssen, und man sollte dann erwarten, daß die Linien außer dem Zeemaneffekt auch den Starkeffekt zeigen würden. Indessen ist es nicht gelungen, eine elektrische Spaltung der Spektrallinien des Sonnenlichtes (Starkeffekt) nachzuweisen. Hieraus kann geschlossen werden, daß die elektrischen Kräfte 20—30 abs. elektrost. Einh. nicht überschreiten. Wie wir gesehen haben, gibt uns das Studium der Natur der Nordlichtstrahlen einen Wert, der 10^8 mal kleiner ist.

Die Sonne ist also im ganzen sehr nahe elektrisch neutral. Dieses hindert jedoch nicht, daß lokale Felder von bedeutenderer Stärke vorhanden sein können, die zuzeiten den Strahlen eine vergrößerte Geschwindigkeit erteilen können und sie vielleicht tiefer in die Atmosphäre der Erde zwingen. Sollte es sich zeigen, daß das Nordlicht in Jahren mit Maximum von Sonnenflecken tiefer in die Atmosphäre herabdringt, so muß dies durch die vergrößerten lokalen Felder auf der Sonne erklärt werden. Aber auch die Felder nahe den Sonnenflecken sind zu klein, um einen Starkeffekt zu geben. Dies führt zu dem Resultat, daß die magnetischen Felder auf der Sonne durch Ströme einsbenannter elektrischer Korpuskeln nicht erzeugt werden können, sondern aus einer Mischung fast gleich großer Teile von positiver und negativer Elektrizität gebildet werden müssen. Diese Ströme werden am nächsten mit galvanischen Strömen zu vergleichen sein und könnten vielleicht am besten als eine Art thermoelektrischer Ströme charakterisiert werden.

Es ist klar, daß die Verhältnisse auf der Sonne im Durchschnitt als einigermaßen stationär betrachtet werden können, und wenn das möglicherweise vorhandene elektrische Feld der Sonne unverändert bestehen soll, müssen *in der Zeiteinheit gleiche Mengen positiver und negativer Elektrizität die Sonne verlassen*. Hieraus folgt indessen nicht notwendigerweise, daß in jedem Augenblicke der Strom negativer Elektrizität mit demjenigen der positiven gleich ist. Es könnte gedacht werden, daß man in gewissen Zeiträumen überwiegend positive Strahlen, in

anderen überwiegend negative hatte. Wir können uns nun die folgende Frage stellen: Ist es möglich, daß diejenige Ausstrahlung, die einen magnetischen Sturm verursacht, wesentlich in einer Steigerung, z. B. positiver Strahlungen, während die negative Strahlung wesentlich unverändert bleibt, bestehen kann?

Wir können aus unseren Messungen von Nordlichthöhen schließen, daß die Änderung des Potentials 13600 abs. elektrost. Einh. nicht überschreiten kann. Hieraus können wir die maximale Variation der Ladung Δe berechnen, die unter den im Winter 1912/13 beobachteten gewöhnlichen magnetischen Stürmen stattfinden kann:

$$\Delta e = \Delta v R = 3,2 \cdot 10^5 \text{ Coul.}$$

Nun wissen wir aber, daß die Stromstärke derjenigen Stromsysteme, die selbst einen mäßigen magnetischen Sturm erzeugen, oft mehrere Hunderttausend Ampere betragen kann, und derjenige Strom, der in die Nähe der Erdoberfläche reicht, ist nur ein sehr kleiner Bruchteil des ganzen Stromes, der von der Sonne ausgeht. Wir werden ihn kaum überschätzen, wenn wir ihn gleich $\frac{1}{1000}$ annehmen. Wenn nun die Ströme von derjenigen Stärke, die notwendig ist, um die magnetischen Störungen erklären zu können, nur aus einer Sorte Elektrizität beständen, würde schon im Laufe einer Zeit, die kürzer als $\frac{1}{1000}$ Sek. ist, das Potential der Sonne die zulässige Größe überschritten haben. Wir gelangen hierdurch zu dem Resultat, daß selbst in einem so kleinen Zeitintervall wie $\frac{1}{1000}$ Sek. annähernd gleiche Mengen von positiver und negativer Elektrizität von der Sonne ausgehen müssen.

Dieses Verhältnis wird für unsere ganze Erkenntnis der magnetischen Variationen und des Nordlichtes von grundlegender Bedeutung sein.

Wenn wir in denjenigen Strahlbündeln, die die magnetischen Stürme erzeugen, mit gleich starker Ausströmung von positiven Atomionen und negativen Elektronen rechnen können, werden wir mit einem Male diejenigen Einwände heben können, die Schuster¹⁾ gegen die kosmische Strahlungshypothese geltend gemacht hat. Schuster hat die Bedingung dafür untersucht, daß ein begrenztes Strahlbündel von Elektronen von der Sonne ausdringen kann und zu magnetischen Perturbationen Anlaß geben von einer Stärke und Dauer wie

1) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. A (5) 85. p. 44. 1911.

diejenigen, die am 25. September 1909 beobachtet wurden. Er findet, daß Strahlbündel aus Elektronen bestehend nicht angenommen werden können, indem die Geschwindigkeit verkleinert werden wird wegen der elektrokinetischen Energie, die während der Bewegung entsteht und eine entgegenwirkende Kraft erzeugen wird. So sollten die Strahlen auf ihrem Wege von der Sonne nach der Erde etwa ein Jahr brauchen. Weiter würde die elektrostatische Abstoßung so groß sein, daß die Strahlbündel schnell seitwärts zerstreut werden würden, und man müßte endlich erwarten, während magnetischer Stürme stärkere elektrostatische Wirkungen zu beobachten als diejenigen, die man wirklich findet. Das Verhältnis würde sich freilich für α -Strahlen in mehreren Hinsichten günstiger stellen; allein jeder Einwand dieser Art verschwindet, wenn wir annehmen, daß im Bündel gleiche Mengen von positiver und negativer Elektrizität strömen. Die Berechnung Schusters setzt nämlich Strahlen von nur einer Sorte voraus; es ist aber klar, daß im Falle von gleich starkem Strom von positiver und negativer Elektrizität das magnetische Feld nach außen fast verschwindend werden wird, und es wird eine elektrokinetische, der Bewegung entgegenwirkende Energie nicht länger entstehen können. Der Energiefluß wird angenähert durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

gegeben sein, wo m_i , v_i die Masse und die Geschwindigkeit eines Strahlträgers ist und N die Anzahl der Strahlträger, die den Querschnitt in der Zeiteinheit durchfließt.

Das elektrostatische Feld nach außen wird auch in hohem Grade vermindert werden. Wenn die positiven und die negativen Strahlen die gleiche Geschwindigkeit hätten, würde die elektrische Dichte gleich Null werden. Sind die Volumdichten der positiven und negativen Elektrizität beziehungsweise ρ_p und ρ_n und die Geschwindigkeiten v_p und v_n , so ist

$$\rho_p v_p = \rho_n v_n.$$

Wenn auch die Strahlen auf ihrem Weg von der Sonne annähernd elektrisch „neutral“ sind, so werden doch die positiven und negativen Strahlen durch das magnetische Feld der Erde getrennt werden, da die Strahlen in verschiedener Richtung und in verschiedenem Grade abgelenkt werden.

Bei der Trennung der positiven und der negativen Gruppen nahe der Erde werden magnetische Felder nach außen entstehen, die die magnetischen Störungen erzeugen können. Die negativen Strahlen werden die Erde nördlicher treffen, und müssen im ganzen *mehr zerstreut vorausgesetzt werden wegen der störenden Wirkung der elektrokinetischen Energie, die bei der Trennung der Strahlen entsteht*. Wir sollten also erwarten, nördlich von der Nordlichtzone Niederschlagfelder negativer Strahlen zu finden, die hier Sturmzentra der Störungen bilden würden. Die Ergebnisse von Birkelands Nordlichtexpedition 1902/03¹⁾ geben auch Andeutungen in dieser Richtung. Es zeigt sich, daß das Auftreten der Perturbationen an der nördlichsten Station Axelöen (Spitzbergen) von deren Auftreten an den drei südlicheren Stationen — Dyrafjord (Island), Kaafjord (Alten) und Matotekkin Schar (Novaya Semlja) — bedeutend verschieden ist. Diese Verschiedenheit muß angenommen werden, durch kleinere, lokale Sturmzentra hervorgerufen zu sein, *die nördlich von der Nordlichtzone auftreten und eine verschiedene tägliche Variation von denjenigen Stürmen zeigen, die ihre Zentra innerhalb der Nordlichtzone haben*.

Es ist wahrscheinlich anzunehmen, daß die Sturmzentra in der Nordlichtzone, die sowohl mit Rücksicht auf Zeit als auch auf Lage dem Nordlicht annähernd folgen, von positiven Strahlen hervorgerufen sind, während wir in den nördlicher gelegenen Sturmzentra wesentlich die Wirkung von Kathodenstrahlen haben können.

Außer den mehr eruptiven Emissionen, die die magnetischen Stürme hervorrufen, ist es möglich, daß wir eine verhältnismäßig gleichmäßige Ausstrahlung von positiver und negativer Elektrizität haben können, möglicherweise an größere materielle Partikeln geknüpft. Diese gleichmäßige Ausstrahlung könnte mit den regelmäßigeren magnetischen Variationen, wie der täglichen Variation, und mit den ruhigeren kosmischen Lichterscheinungen, wie dem Zodiakallicht, das nach Birkeland wie das Nordlicht von Ausstrahlungen von der Sonne herrühren muß, natürlich in Beziehung gesetzt werden.

Als treibende Kraft bei dieser Emission von Elektrizität haben wir die radioaktiven Prozesse, die besonders bei der

1) K. Birkeland, The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902/03. Vol. I, Sect. II, Chapt. III. p. 543. 551. 1913.

Erzeugung von Nordlicht und den magnetischen Stürmen wirksam sein sollten. Als treibende Kräfte bei der möglichen konstanteren Ausstrahlung muß außer den radioaktiven Prozessen vorzugsweise an die thermische Wirkung und den Strahlungsdruck gedacht werden. Dagegen ist es wenig wahrscheinlich, daß gewöhnliche elektrische Entladungen hier in Betracht kommen können. Eine permanente Entladung in den Weltraum mit der Sonne als dem einen Pol kann nicht stattfinden; denn dies würde zur Folge haben, daß die Sonne aufgeladen würde, was wider die Erfahrung streitet. Starke lokale elektrische Felder, die zu Entladungen innerhalb der Sonne selbst Anlaß geben könnten, scheinen auch nicht wahrscheinlich zu sein, da der Starkeffekt nicht nachgewiesen werden kann. Doch ist die Sache hier unsicher, indem unter Umständen verhältnismäßig starke Felder vorhanden sein können, ohne durch den Starkeffekt entdeckt werden zu können.

Damit die Temperatur Emission erzeugen kann, muß sie so groß sein, daß sie der kleinsten Masse, die positive Elektrizität führt, eine lebendige Kraft erteilen kann, die derjenigen Arbeit gleich ist, die bei der Ausstrahlung gegen die Anziehung der Sonne ausgeführt werden muß.

Für Partikeln atomistischer Größenordnung ist, wie ich früher bemerkt habe¹⁾, der Strahlungsdruck im Verhältnis zur Gravitation verschwindend, und um ein Atom in die Unendlichkeit hinaus zu bringen, muß dies auf der Sonne eine Geschwindigkeit besitzen, die gleich oder größer als $4,4 \cdot 10^7$ cm/sec⁻¹ ist. Wir sehen hieraus, daß die Gravitation auf α - und β -Strahlen keinen merkbaren Einfluß ausübt.

Die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Wasserstoffatoms bei einer Temperatur $T = 6000^\circ$ ist $1,25 \cdot 10^6$ cm/sec⁻¹, und da viele Wasserstoffatome Geschwindigkeiten besitzen, die bedeutend über den mittleren liegen, kann wohl gedacht werden, daß Atomionen durch die thermische Wirkung in den Raum hinausgetrieben werden können. Es werden jedoch nur die allerleichtesten Atome auf diese Weise möglicherweise ausgestoßen.

Wenn die Partikeln Durchmesser von derselben Größenordnung wie der Wellenlänge des Lichtes haben, so wird der Strahlungsdruck bekanntlich größer als die Wirkung der

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 41. p. 642. 1913.

Gravitation werden können, und Materie dieser Größenordnung — möglicherweise elektrisch geladen — wird durch die Wirkung des Strahlungsdruckes die Sonne verlassen können. Wenn das Zodiakallicht aus derartigem kosmischem Staub hervorgegangen sei, würde dies den Umstand erklären, daß das Spektrum des Zodiakallichtes reflektiertes Sonnenlicht zeigt, indem die Partikeln so groß sind, daß sie fähig sein sollten, das Sonnenlicht zu zerstreuen.

§ 8. Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Ein Vergleich zwischen Nordlicht und magnetischen Stürmen, die während meines Aufenthaltes in Bossekop im Winter 1912/13 auftraten, hat gezeigt, daß das Nordlicht selbst nur einen sehr kleinen Teil der ganzen perturbierenden Kraft hervorruft. Starke Nordlichter sind beobachtet worden ohne merkbare magnetische Wirkung. Auf Grundlage der Gleichartigkeit des Nordlichtes kann man hieraus den wichtigen Schluß ziehen, daß die starken magnetischen Störungen nur um einen geringen Teil von einer direkten Wirkung des Nordlichtes herrühren; sie müssen von höher liegenden Stromsystemen bedingt sein. Hieraus folgt, daß man kaum erwarten kann, mittels Vergleiches mit den magnetischen Stürmen die Frage nach dem Zeichen der Ladung der Strahlen zu entscheiden, so wie Störmer gemeint hat.

2. Die Höhenmessungen haben gezeigt, daß die Nordlichtstrahlen zu einer Höhe von ca. 100 km herabdringen, was mit meinen früheren Berechnungen über die Eindringung der α -Strahlen in die Atmosphäre in bester Übereinstimmung steht. Sollten β -Strahlen die beobachteten Höhen erklären können, so müßten sie sehr weich sein ($v = 1,4 \cdot 10^{10}$ cm/sec⁻¹), würden aber da die südliche Lage der Nordlichtzone nicht erklären können. Die Annahme eines permanenten Stromringes aus diesen Strahlen bestehend, wird nach Störmer die Strahlen zwar in den richtigen Abstand vom magnetischen Nordpol bringen können, es kann aber nachgewiesen werden, daß ein solches Stromsystem, das notwendig ist, um die Strahlen richtig abzulenken, nicht existieren kann, weil der Stromring wegen der gegenseitigen elektrostatischen Kraftwirkung der Korpuskeln in hohem Grade instabil werden wird.

3. Eine eingehendere Untersuchung der Lichtverteilung bei α -Strahlen hat gezeigt, daß diese instande sind, die beobachtete Verteilung sowohl qualitativ als auch quantitativ zu erklären. Dagegen werden nach Berechnungen von Lenard und Störmer die Kathodenstrahlen die scharfe untere Grenze und die geringe Höhe der Leuchtung bei vielen Nordlichtdraperien quantitativ nicht erklären können.

4. Die Existenz homogener Strahlgruppen, die durch Höhenmessungen des Nordlichtes nachgewiesen werden können, ist eine notwendige Folge der α -Strahlentheorie und führt notwendig zu dem Schluß, daß die Strahlen entweder von radioaktiven Prozessen herrühren oder *positive* Atomstrahlen sind, durch Entladung von der Sonne erzeugt. Diese letzte Möglichkeit muß jedoch als fast ausgeschlossen betrachtet werden wegen der stattfindenden Umladung der gewöhnlichen positiven Strahlen (Kanalstrahlen). — Im Falle von Kathodenstrahlen kann bei Entladung höchstens eine einzelne Gruppe homogener Strahlen entstehen. Selbst β -Strahlen von radioaktiven Stoffen werden u. a. wegen ihrer großen Durchdringungsfähigkeit und Ablenkbarkeit als Ursache des Nordlichtes nicht angenommen werden können. Die homogenen Gruppen, woraus die Strahlen bestehen sollten, würden sich auch mit Rücksicht auf die Durchdringungsfähigkeit so wenig unterscheiden, daß sie eine kleine Anzahl wohl getrennter Höhen maximaler Häufigkeit des Nordlichtes nicht erklären können.

5. Das Studium der Natur des Nordlichtes führt uns zu dem Resultat, daß die Sonne im ganzen nur ein sehr kleines elektrisches Feld besitzen kann. An der Oberfläche der Sonne kann die elektrische Kraft die Größenordnung von $2 \cdot 10^{-7}$ elektrost. Einh. nicht überschreiten. Weiter wird gefunden, daß die Sonne durchschnittlich in der Zeiteinheit gleiche Mengen positiver und negativer Elektrizität aussenden muß. Wegen des geringen elektrischen Feldes kann auch nicht während eines magnetischen Sturmes die Sonne einen besonderen Überschuß einer Sorte von Elektrizität aussenden. Denn wenn ein Strom einer Sorte Elektrizität von derjenigen Stärke, die notwendig ist, um eine mittelstarke Perturbation hervorzurufen, allein tätig wäre, würde die Sonne schon im Laufe einer Zeit, die kleiner als $\frac{1}{1000}$ Sek. ist, über die zulässige Spannung aufgeladen werden. Selbst während magne-

tischer Stürme muß die Sonne in einem Zeitintervalle von $\frac{1}{1000}$ Sek. gleiche Mengen von positiver und negativer Elektrizität aussenden.

6. Als treibende Kraft bei diesem Prozeß kann für große und langsame Partikeln der Strahlungsdruck tätig sein, für die leichteren Atome die thermische Wirkung und die radioaktiven Prozesse. Die letzteren sollten für diejenigen Strahlungen, die zu Nordlicht und magnetischen Stürmen Anlaß geben, wesentlich verantwortlich sein. Außer dieser eruptiveren Emission können wir auch eine gleichmäßigere Emission positiver und negativer Elektrizität von der ganzen Oberfläche der Sonne haben. Diese regelmäßigere Emission, die möglicherweise zum Teil durch den Strahlungsdruck und die thermische Wirkung gefördert sein kann, mag bei Erscheinungen wie dem Zodiakallicht und der täglichen Variation des Erdmagnetismus eine bedeutende Rolle spielen.

7. Der Umstand, daß die Sonne in der Zeiteinheit gleiche Mengen von positiver und negativer Elektrizität aussendet, wird diejenigen Einwände heben, die A. Schuster gegen die kosmische Strahlungshypothese geltend gemacht hat. Die gleichzeitigen Ströme von positiver und negativer Elektrizität erklären die geringe elektrostatische Wirkung und erschweren die Bestimmung der Art der Strahlen mittels derselben. Die wichtigsten Mittel bei dem Studium der Natur der Strahlen haben wir in der Untersuchung der Lage und täglichen Variation des Nordlichtes, dessen Höhe, Form und Struktur samt der Lichtverteilung, und diese Untersuchungen haben alle die α -Strahlenhypothese bestätigt.

Diejenigen Verhältnisse, die wir für den elektrischen Zustand der Sonne hergeleitet haben, stützen sich wesentlich auf die Ergebnisse der Höhenmessungen des Nordlichtes und müssen jedenfalls für die Jahre um die Sonnenfleckminima als geltend angenommen werden. Sollte es sich zeigen, daß das Nordlicht während Sonnenfleckmaxima wesentlich näher an der Oberfläche der Erde auftritt, so würde dies zur Folge haben, daß man für diese Zeiträume annehmen muß, daß jedenfalls während magnetischer Stürme auf der Sonne bedeutende lokale Felder entstehen können.

(Eingegangen 28. Juni 1916.)

Anmerkung bei der Korrektur.

Ein Weg zur Bestimmung der Ladung ist vielleicht auch dadurch gegeben, daß man die Zeit für das Auftreten der magnetischen Stürme mit dem Zeitpunkt, wenn die Strahlungsquelle den Zentralmeridian passiert, vergleicht. Ricco¹⁾ hat gefunden, daß die magnetischen Stürme nicht in dem Augenblick, wo die Sonnenflecke den Zentralmeridian passieren, sondern erst auf 40–50 Stunden später ihre größte Stärke erreichen. Ein ähnliches Resultat ist aus den Beobachtungen Birkelands von 1902–1903 hergeleitet worden. Mehrere Deutungen dieses Verhältnisses sind denkbar. Wohl die einfachste und wahrscheinlichste Deutung ist von Birkeland²⁾ angegeben. Nach ihm wird die Verspätung dadurch verursacht, daß die kosmischen Strahlen durch das magnetische Feld der Sonne abgelenkt werden. Mit dem von ihm angenommenen *negativen* Strahlen muß er annehmen, daß die *Richtung des allgemeinen Kraftfeldes der Sonne dem der Erde entgegengesetzt* ist.

Wie bekannt ist es Hale³⁾ gelungen mit Hilfe des Zeeman-effektes ein allgemeines Magnetfeld der Sonne nachzuweisen; er findet aber, daß die Richtung des Feldes *ähnlich demjenigen der Erde verläuft*.

Um den Widerspruch aufzuklären hat Birkeland⁴⁾ die Meinung vertreten, daß das von Hale beobachtete Feld von lokaler Natur ist, und daß also das allgemeine Feld unabhängig von diesen Lokalfeldern existiert, und solange man so wenig über den Ursprung des Sonnenmagnetismus weiß, ist eine solche Möglichkeit wohl nicht ausgeschlossen. Wenn wir aber die α -Strahlenhypothese zugrunde legen, begegnen wir keinen solchen Schwierigkeiten; denn wenn wir mit Birkeland die Verspätung der magnetischen Stürme durch das Sonnenmagnetfeld erklären wollen, so muß man die von Hale beobachteten *Magnetisierungsrichtung annehmen*.

Es bleibt doch eine scheinbare Schwierigkeit zurück, wenn wir die Feldstärke betrachten. Ähnlich, wie es Birke-

1) Ricco, Nature, Nov. 4. 1909.

2) K. Birkeland, Compt. rend. 1910.

3) Hale, Astrophys. Journ. 35. 1913.

4) K. Birkeland, Compt. rend. 157. p. 394. 1913.

land¹⁾ gemacht hat, können wir auf Grund der α -Strahlungshypothese dasjenige magnetische Moment, das für die Erklärung der beobachteten Verspätung nötig ist, berechnen. Aus den Berechnungen Störmers²⁾ über die Bahnen elektrischer Strahlen im magnetischen Äquatorplan findet man leicht, daß die Sonne im ganzen ein magnetisches Moment von etwa 2×10^{27} besitzen muß, und damit α -Strahlen im Äquatorplan überhaupt ausstrahlen können, muß das allgemeine Sonnenfeld ein Moment kleiner als 10^{28} besitzen. — *Dies ist das größte Moment, das mit der α -Strahlungshypothese verträglich ist.*

Andererseits hat Hale für die magnetische Kraft an den Polen den ziemlich großen Wert von 50 Gauss gefunden, und wäre die Sonne annähernd als gleichförmig magnetisiert zu betrachten, so würde diese Feldstärke ein Moment von etwa 8×10^{23} entsprechen.

Die Annahme von einer annähernd gleichförmigen Magnetisierung der Sonne ist jedoch ganz willkürlich und auch wenig wahrscheinlich. Die α -Strahlungshypothese läßt sich sofort mit den Beobachtungen von Hale in Einklang bringen, wenn wir mit Hale annehmen, daß *das allgemeine Magnetfeld der Sonne durch Stromsysteme in einer verhältnismäßig dünnen Oberflächenschicht verursacht wird.*

In dem Fall, daß wir mit einem allgemeinen magnetischen Feld auf der Sonne zu tun haben, können die positiven und negativen Strahlen nicht demselben Weg folgen. Mit einem magnetischen Moment von 2×10^{27} können wohl α -Strahlen, aber selbst nicht die schnellsten β -Strahlen in der Nähe des magnetischen Äquatorplans die Sonne verlassen, und wir müssen mit der Möglichkeit rechnen, daß negative Strahlen vorzugsweise von den polaren Gegenden ausgehen, wo sie den magnetischen Kraftlinien folgen können. Da die Erde niemals weit von dem magnetischen Äquatorplan der Sonne entfernt ist, können wir vielleicht hierdurch erklären, warum wir vorzugsweise positive Strahlen von der Sonne empfangen.

1) K. Birkeland, Compt. rend. 1910.

2) C. Störmer, Arch. d. Sc. phys. et nat. 1907. p. 128.

2. Bohrs Heliumlinien¹⁾; von F. Paschen.

(Hierzu Tafel V.)

Im Sommer 1914 fanden Hr. H. Bartels und Verf. zufällig, daß die von Fowler entdeckten Linien, welche nach Bohr dem Helium zuzuschreiben sind, ziemlich intensiv in der leuchtenden Schicht innerhalb der Zylinderkathode einer Helium-Geißleröhre auftreten. Die Röhre war mit Gleichstrom betrieben und mit reinem Helium gefüllt. Alle Linien des Fowlerschen Spektrums²⁾ wurden mit einem Quarzspektrographen gefunden und mit Hilfe eines kleineren Konkavgitters gemessen. Ferner wurde die Linie 4686 in einem 34stufigen Echelon als mindestens doppelt erkannt und die Schwingungsdifferenz der zwei stärksten Komponenten gemessen.³⁾

Die infolge des Krieges zunächst unterbrochene Arbeit wurde vom Verf. im Sommer 1915 fortgesetzt. Man erkannte, daß das Fowlersche Spektrum am Orte des Beginnes der

1) N. Bohr, Phil. Mag. Juli 1913. p. 1; September 1913. p. 476; November 1913. p. 857; März 1914. p. 506; Februar 1915. p. 332.

2) A. Fowler, Monthly Notices of the Roy. Astronomical Society. Vol. 73. Nr. 2. 1912.

3) Anlässlich einer Notiz von E. J. Evans und C. Croxson, Manchester, 4. März. 1916; Nature, 16. März 1916. Nr. 2420. Vol. 97, über die in einem Echelon gesehene Struktur dieser Linie sei bemerkt, daß in meinem Echelon von den Komponenten der 4686-Gruppe folgende zu sehen sind: 1. die starke Komponente 4685,809; 2. eine zweite starke Linie, welche um 0,094 Å.-E. nach kleineren Wellenlängen von der ersten entfernt liegt. Diese enthält übereinandergelagert die Komponente 4685,703 und die nächste Ordnung der Komponenten 4685,388. Außerdem ist 3. die schwache Komponente 4685,905 getrennt von anderen Komponenten da. Es scheint, daß das Komponentenbild, welches obige Beobachter in ihrem Echelon gesehen haben, ähnlich ist. Die Zuordnung der gesehenen Komponenten wurde in oben gegebener Weise erst durch die Analyse mit dem großen Konkavgitter entschieden.

Glimmschicht einer stationären Entladung im Helium auftritt. Dies ist im Einklang mit einem Funde von H. Rau¹⁾ und auch mit der Anordnung von Fowler, bei der die emittierende Schicht vor einer Striktionskathode²⁾ liegt. Es wurde weiter bemerkt, daß dieses Glimmlicht bei niederem Gasdrucke auf das Innere einer hohlen Zylinderkathode beschränkt bleibt und dort durch Vermehrung der Stromstärke zu intensivem Leuchten gebracht werden kann. Die äußeren Wände der Zylinderkathode bleiben, wohl infolge von Ladungen auf den umschließenden Glaswänden, dunkel. Die hiernach konstruierte Heliumlampe enthielt eine kastenförmige

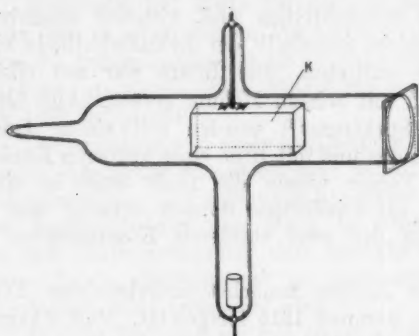


Fig. 1a.



Fig. 1b.

Kathode aus dünnem Aluminiumblech K. Die innere Längsschicht des 5 cm langen Kastens strahlte durch ein planes Quarzfenster nach außen. Die Lampe ist in Fig. 1a abgebildet. In Fig. 1b ist die Glimmschicht G im Kasten skizziert, wie sie in Längsdurchsicht aussah (bei etwa 0,5–1 mm Druck). Wird die Röhre nach genügender Sauerstoffreinigung mit Helium von 2 mm Druck gefüllt und abgeschmolzen,

1) H. Rau, Sitzungsber. d. Würzburger Physik. Ges. 26. Februar 1914.

2) Bei geringem Druck erhielt ich das Fowlersche Spektrum in der Fowlerschen Anordnung vor dem der Anode zugekehrten Kapillarenende auch bei Gleichstrom. Dagegen blieb das Fowlerspektrum aus, als im Inneren eines Aluminiumkastens aus einem unbekannten Grunde eine Art Wehneltkathode entstand, wobei von einer schwarz gefärbten Stelle direkt positives Licht ausstrahlte.

so
und
dau
von
Akl
im
in
me
und
sch
kon
nac
gro
dur
Aus
kon
(tag
im
Ana
lyse
Stu
und
sind
in
wer
gran
pliz
trum
I. C
hate
Gitt
Disp
Das
jede
zu
ging
lage
Wiss

so evakuiert sie sich unter stärkerer Belastung von selber und hat dann bei Gleichstrom von 0,1 Amp. nur eine Lebensdauer von 70–100 Stunden, bei Flaschenfunkenentladung von 10–15 Stunden. Mit Gleichstrom einer 1000voltigen Akkumulatorenatterie betrieben, emittiert die Glimmschicht im Innern der Kathode bei 0,05–0,10 Amp. die Linie 4686 in solcher Intensität, daß diese Linie mit gewöhnlichen Prismen- und kleinen Gitterspektrographen in wenigen Sekunden und Minuten, und in der 3. Ordnung des großen Rowland-schen Konkavgitters in wenigen Stunden photographiert werden konnte. Da die zur Untersuchung des Zeemanphänomens nach Runge und Paschen¹⁾ getroffene Anordnung meines großen Konkavgitters infolge starrer Verbindung aller Teile durch den Steinboden und aufgemauerten Ringtisch, unter Ausschluß von Holz und schwingungsfähigen Balken, bei konstanter Temperatur Expositionen von beliebiger Dauer (tagelange) ohne merkliche Verschiebungen gestattet, konnten im Spätsommer 1915 alle Fowlerschen Linien der feinen Analyse durch dieses Gitter unterworfen werden. Diese Analyse übertrifft im vorliegenden Falle diejenige durch das Stufengitter, weil die Feinstrukturen der Linien kompliziert und vielfach über mehr als eine Echelonordnung ausgedehnt sind. Die tatsächliche Auflösungskraft meines Konkavgitters in III. Ordnung ist der des Stufengitters ziemlich gleichwertig. Die Vergleichung gleichzeitig genommener Spektrogramme in verschiedenen Gitterordnungen ergibt die komplizierte Linienstruktur eindeutig. Die Dispersion des Spektrums des großen Konkavgitters variiert auf dem Kreis in I. Ordnung von 2,2–2,6 Å.-E./mm. Die benutzten Ordnungen hatten folgende Dispersion:

Gitterordnung:	I	II	III	IV	V	VI
Dispersion Å.-E./mm	2,3	1,2	0,86	0,62	0,48	0,38

Das Bild im Stufengitter ist nicht ohne umständliche und für jede Linie besonders gestaltete Nebenexperimente eindeutig zu analysieren. Die schwachen Komponenten von 4686 z. B. gingen hier verloren, ebenso starke wegen gegenseitiger Überlagerung verschiedener Ordnungen (vgl. Anm. 3, p. 901).

1) C. Runge u. F. Paschen, Anh. z. d. Abh. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1902.

Verf. unternahm die Bestimmung der Wellenlängen des Fowlerschen Spektrums nach den von Buisson und Fabry aufgestellten Eisennormalen¹⁾, um eine strengere Prüfung der Bohrschen Gesetze durchführen zu können. Eine direkte Vergleichung der Fowlerschen Linien mit dem Eisenspektrum schien nicht angängig. Bei den für die schwächeren Linien und für die Feinstrukturen erforderlichen längeren Expositionen konnten durch Temperaturveränderungen geringe Verschiebungen eintreten, welche die Linienschärfe kaum beeinflussen, welche aber beim Vergleich mit dem zwischendurch hineinphotographierten Eisenspektrum Fehler verursachen konnten. Da außerdem die Heliumlampe nur abgeschmolzen im Gitterraume verwendet werden konnte und infolge ihrer kurzen Lebensdauer für unnötige Experimente zu wertvoll war, so zog ich es vor, die Bohrschen Linien zunächst gegen benachbarte Linien des gewöhnlichen Heliumspektrums zu messen, welches in der Glimmschicht lichtstark zugegen ist. Durch besondere Aufnahmen des Spektrums gewöhnlicher Helium-Geißleröhren und des Eisenbogens wurden die Heliumlinien, welche für die Messung der Bohrschen Linien herangezogen waren, gegen die Eisennormalen von Buisson und Fabry gemessen. Die doppelte Übertragung machte eine Reihe von Aufnahmen und Messungen nötig, damit der Fehler wenige Tausendstel der Ångströmeinheit nicht übertraf. Es sind 14 gut gelungene Aufnahmen des Fowlerschen Spektrums und 20 Hilfsaufnahmen des gewöhnlichen Heliumspektrums und des Eisenbogens zur Messung verwendet.

Nach Bohr kann man das Verhältnis der Massen des Wasserstoffions und des Elektrons und dadurch auch die spezifische Ladung des Elektrons e/μ spektroskopisch bestimmen. Man muß dazu die Konstanten der Balmerschen Wasserstoffserie und der Bohrschen Heliumserien messen. Die bisherigen Messungen an den Wasserstoff- und den Bohrschen Heliumlinien konnten zwar von Bohr schon zum rohen Beweise der Richtigkeit seiner Beziehung verwendet werden. Sie genügen indessen nicht zu einer brauchbaren spektroskopischen Bestimmung von e/μ . Ich habe daher die vier stärksten Wasserstofflinien der Balmerserie so exakt gegen

1) H. Buisson u. Ch. Fabry, Ann. de la Fac. d. Sciences de Marseille. Tome XVII. Fasc. III. 1908.

Buisson-Fabrys Eisennormalen gemessen, wie es bei der durch komplexe Struktur und Dopplereffektverbreiterung verursachten Unschärfe dieser Linien möglich ist.

Nachdem die ersten Messungen beendet waren, stieß man bei ihrer Verwertung auf Grund der Bohrschen Theorie auf Schwierigkeiten. Alle Linien sind kompliziert gebaut, die der Hauptserie z. B. mindestens dreifach. Keine der beobachteten Komponenten befolgt Bohrs Theorie innerhalb der Messungsfehler. Folgendes Beispiel möge dies zeigen. Die Bestimmung von e/μ kann durch Messung der Wellenlängendifferenz der Wasserstofflinien und der nahe bei ihnen liegenden Bohrschen Heliumlinien geschehen, ohne daß man absolute Wellenlängen genau zu messen braucht. Die Wasserstofflinien erscheinen in der beschriebenen Heliumlampe leicht zugleich mit den Bohrschen Linien, wenn die Lampe nicht außerordentlich gut gereinigt und getrocknet ist. In solchen Aufnahmen wurden die schwärzesten Stellen der Wasserstofflinien H_α , H_β , H_γ , H_δ eingestellt und ihr Abstand $\lambda_\omega - \lambda_{He}$ von den schwärzesten Stellen der benachbarten Bohrlinien He_α , He_β , He_γ , He_δ ¹⁾ nach Ångströmeinheiten gemessen. Das Verhältnis der Massen des Wasserstoffions M_ω zur Masse des Elektrons μ ergab die Formel:

$$\frac{M_\omega}{\mu} = \frac{\lambda_\omega}{\lambda_\omega - \lambda_{He}} \frac{2,96}{3,96} - 1.$$

Die spezifische Ladung des Elektrons wurde berechnet nach der Formel:

$$\frac{e}{\mu} = \frac{e}{M_\omega} \times \frac{M_\omega}{\mu} = \frac{9649,4}{1,008} \left(\frac{\lambda_\omega}{\lambda_\omega - \lambda_{He}} \frac{2,96}{3,96} - 1 \right)$$

(vgl. hierzu p. 935). Tab. I enthält die Resultate.

1) Diese Linien, welche Fowler noch nicht gefunden hatte, glaubt E. J. Evans nachgewiesen zu haben (Phil. Mag. 29. p. 284—297. 1915). Evans wandte infolge der Lichtschwäche dieser Linien bei seiner Erzeugungsart des Spektrums Spektralapparate an, welche die Heliumlinien nicht von den benachbarten Wasserstofflinien trennten (Dispersion 75—30 Å.-E. pro Millimeter) und mußte daher seine Geißleröhren für die stunden- bzw. tagelangen Expositionen völlig frei von Wasserstoff halten. Sein Spektrum war aber ziemlich unrein, und seine Wellenlängenangaben liegen zum Teil zwischen den Wellenlängen des Wasserstoffes und des Heliums.

Tabelle I.

	λ_{∞} Å.-E.	$\lambda_{\infty} - \lambda_{H\alpha}$ Å.-E.	$M\omega/\mu$	$e/\mu \times 10^{-7}$	$\lambda_{\infty} - \lambda_{H\alpha}$ gemessen in
H_a	6562,8	2,667	1889	1,760	I. Ordnung
H_{β}	4861,3	1,984	1881	1,758	I., II., III. Ordnung
H_{γ}	4340,5	1,771	1881	1,758	" " " "
H_{δ}	4101,7	1,685	1818	1,741	I. und III. "

Da die beobachteten Werte $\lambda_{\infty} - \lambda_{H\alpha}$ bis auf wenige Tausendstel Ängströmeinheiten sicher sind, so ist ein unbefriedigender Gang in den Resultaten von etwa der achtfachen Größe der Beobachtungsfehler. Das Mittel 1,752 der Werte von $e/\mu \cdot 10^{-7}$ hat eine Unsicherheit, die mit der Genauigkeit der Wellenlängenmessung im Widerspruch steht. Mißt man ferner die Differenz $\lambda_{\infty} - \lambda_{H\alpha}$ von der geschätzten Lage der stärkeren (roten) Komponenten der Wasserstofflinien an, so würde zwar der Gang verkleinert, aber der Mittelwert von $e/\mu \cdot 10^{-7}$ würde dann 1,74 betragen: im Widerspruch mit dem sonst bekannten Werte $1,76 \pm 0,01$ dieser Größe.

Eine Klärung der Unstimmigkeiten brachte die neue Theorie von A. Sommerfeld.¹⁾ Sommerfeld nimmt neben den Bohrschen Kreisbahnen des Elektrons auch elliptische an. Eine erweiterte Anwendung der Quantenhypothese auf die Vorstellungen des Bohrschen Atommodells führt in diesem Falle dazu, daß zwei Energieparameter nach ganzzahligen Quanten variieren. Es treten Linienkomplexe auf, die an die einfachen Linien Bohrs anschließen, und deren Struktur in einfacher Weise mit der Ordnungszahl der Elektronenbahn oder des Terms der Serienformel zusammenhängt. Die entsprechenden Schwingungsdifferenzen lassen sich absolut oder relativ zu der Schwingungsdifferenz eines Wasserstoffdoubletts angeben.

Durch diese Theorie und mit freundlicher Hilfe ihres Schöpfers war es möglich, die komplizierten Verhältnisse befriedigend zu klären und so schließlich das gesamte Beobachtungsmaterial an den Helium- und Wasserstofflinien in genügende Übereinstimmung mit Bohrs allgemeiner Theorie und mit Sommerfelds Theorie der Feinstrukturen zu bringen.

1) A. Sommerfeld, Sitzungsber. d. K. Bayr. Akad. d. Wiss. 4. Dez. 1915. p. 425 u. 8. Januar 1916. p. 459, sowie diese Annalen 51. p. 1. 1916. Im folgenden schließen wir uns an die Bezeichnungen und Formulierungen dieser letzten Darstellung an.

Die stärksten und weit getrennten Komponenten der Theorie waren schon vorher gefunden. Aber die Theorie verlangte in vielen Fällen Feinstruktur, wo zunächst unaufgelöste Linien als einfache beobachtet waren. Auch war es möglich, daß noch schwache Komponenten unbemerkt geblieben waren, welche nach der Theorie zu erwarten waren. Ein erneutes Studium des Plattenmaterials auf Grund der Theorie förderte in der Tat mehrfach derartige Feinheiten zutage, die vorher nicht erkannt waren, und die oft die richtige Deutung und Zuordnung des Liniengebildes entschieden. Wenn die starken Komponenten in einer unaufgelösten Linie übereinander gelagert sind, findet die Wellenlänge ihres Intensitätsmaximums innerhalb ihrer Meßgenauigkeit keinen Platz in der Theorie. Wenn man aber dann eine dazu gehörige sehr schwache, aber weit getrennte Komponente sicher beobachten kann, die der Theorie genau entspricht, ist das ganze Gebilde theoretisch zu deuten. Dieser Fall liegt bei der Bohrschen Nebenserie vor und ist zusammen mit einer anderen Erscheinung der Feinstrukturen der Grund für die mangelhafte Übereinstimmung der Resultate in Tab. I.

Verwendete Resultate der Theorien.

Bohrs Serienformel lautet:

$$(I) \quad \nu = N_{\infty} \frac{M}{M + \mu} \left(\frac{E}{e} \right)^2 \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right) \left[1 + \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{E}{e} \right)^2 \left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{k^2} \right) \right].$$

1. $N_{\infty} = \frac{2 \pi^2 e^4 \mu}{c h^3}$ ist die Rydbergkonstante für $M = \infty$.
2. $N_{\infty} = N_{\infty} \frac{M_{\infty}}{M_{\infty} + \mu}$ " " " für Wasserstoff.
3. $N_{\text{He}} = N_{\infty} \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{He}} + \mu}$ " " " für Bohrs Heliumspektrum.
4. $\alpha = \frac{2 \pi e^2}{h c}$ Konstante wichtig auch für Sommerfelds Theorie.

e und μ Ladung und Masse des Elektrons;

E und M Ladung und Masse des positiv geladenen Kernes;

h Plancks Konstante;

i und k Ordnungsnummern der Elektronenbahnen und Serienterme;

ν Wellenzahl (reziproker Wert der Wellenlängen in cm^{-1});

c Lichtgeschwindigkeit.

Das Glied in eckiger Klammer ist die Relativitätskorrektur nach Bohr (Phil. Mag. Febr. 1915. p. 332) und A. Sommerfeld. Bohrs Serien sind also dargestellt durch

$$\text{Wasserstoff Ia: } \nu_{\infty} = N_{\infty} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right) \left[1 + \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{k^2} \right) \right].$$

$$\text{Helium Ib: } \nu_{H_0} = N_{H_0} 4 \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right) \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{k^2} \right) \right].$$

Diese Formeln geben die Strahlung infolge des Elektronenüberganges vom k ten auf den i ten Kreis.

Sommerfeld nimmt neben diesen Kreisen noch elliptische Elektronenbahnen an und berechnet allgemein die Energiedifferenz des Elektronensprunges von einer zu k gehörigen auf eine zu i gehörige Ellipse. Die zugehörigen Ellipsen sind infolge der erweiterten Quantenbedingungen, welche Bohrs Quantenansatz für die Kreisbahn umfassen, solche bestimmter Exzentrizitäten. Dem entspricht eine neue Variation in den ganzzahligen Parametern i und k . Es ist zu setzen:

$$i = n + n' \quad \text{und} \quad k = m + m',$$

wobei

$$\begin{array}{ccccccc} n & \text{und} & n' & \text{alle ganzzahligen Werte von} & 0 & \text{bis} & i \\ m & ,, & m' & ,, & ,, & ,, & 0 ,, k \end{array}$$

annehmen können.

$$n' = 0 \quad \text{bzw.} \quad m' = 0,$$

also

$$n = i \quad \text{bzw.} \quad m = k$$

entsprechen der Exzentrizität 0 der Ellipse und beziehen sich demnach auf Kreisbahnen. Für diesen Fall bleiben Bohrs Formeln gültig. Ausgeschlossen wird der Fall

$$n = 0 \quad \text{bzw.} \quad m = 0,$$

dem eine Pendelbewegung des Elektrons in gerader Linie durch den Kern hindurch entsprechen würde.

Danach hat der Serienterm i eine i fache Mannigfaltigkeit:

$$\begin{array}{ccccccc} i & = & i & + & 0 & & \\ & & i & - & 1 & + & 1 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & i & = & 1 & + & i - 1 \end{array}$$

und gibt zu einer in i Einzelkomponenten aufgespaltenen Linie Anlaß.

Die Energie der Elektronenbewegung des Terms $n + n'$ ist von Sommerfeld (l. c. p. 55, Fl. (21) gegeben als $W_{n, n'}$.

$$\Delta v_{n'} = \frac{W_{n+1, n'-1} - W_{n, n'}}{h}$$

ist die Schwingungsdifferenz zwischen der $n' - 1$ ten und der n' ten Komponenten des positiven Serienterms i . Die Kreisbahnkomponente $i, 0$ liegt nach Rot. An sie schließen sich die i Komponenten an.

Analog berechnet man die gegenseitigen Abstände der dem negativen Term k zugehörigen k Komponenten. Sie liegen wegen des entgegengesetzten Vorzeichens der Energie und des Terms umgekehrt; die Kreisbahn $k, 0$ gibt hier die blaueste Komponente, und die anderen Komponenten schließen sich mit analog wie oben berechneten gegenseitigen Abständen nach Rot an.

Zunächst ist der Elektronensprung von jeder k -Ellipse auf jede i -Ellipse in Betracht zu ziehen. Daher würde jede i -Komponente die erste der an sie nach Rot anschließenden k -Komponenten des k -Terms sein. Sommerfeld erwartet indessen, daß stärkere Komponenten an die Bedingungen $m \geq n$ wie auch $m' \geq n'$ geknüpft sind. Ferner erwartet er, daß die Kreisbahn die größte Intensität besitzt, sofern sie nicht durch die vorangehenden „Quantenungleichungen“ unterdrückt wird, und daß die Intensität der Komponenten mit steigendem Werte der Exzentrizität zugehöriger Ellipsen abnimmt.

Wir werden im folgenden alle i, k Komponenten eines Seriengliedes in Betracht ziehen. Von ihnen entspricht diejenige, welche durch Kombination des positiven Terms $i, 0$ mit dem negativen Term $k, 0$ entsteht, dem Elektronensprung zwischen zwei Kreisbahnen.

Wir berechnen aus Sommerfelds Energieausdruck:

$$(II) \quad \Delta v_n = \frac{W_{n+1, n'-1} - W_{n, n'}}{h} = \frac{N \alpha^2}{(n + n')^4} \left(\frac{E}{e} \right)^4 \frac{n + n'}{n(n+1)}.$$

α ist die universelle Konstante

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$$

(vgl. p. 907, Fl. 4).

Zum Beispiel gibt $i = 2$, $n = 1$, $n' = 1$

$$\Delta \nu_1 = \frac{W_{20} - W_{1,1}}{h} = N \frac{a^2}{2^3} \left(\frac{E}{e} \right)^4.$$

Dem Term $i = 2$ entspricht daher ein Dublett, welches für Wasserstoff die Schwingungsdifferenz hat:

$$\Delta \nu_{\omega} = \frac{N a^2}{2^4}.$$

Diese Schwingungsdifferenz kann allen sonst vorkommenden zugrunde gelegt werden. Ihre Einführung in (II) gibt nämlich:

$$(IIa) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta \nu_{n'} &= \Delta \nu_{\omega} \left(\frac{E}{e} \right)^4 \frac{2^4}{n(n+1)(n+n')^3} \\ &= \Delta \nu_{\omega} \left(\frac{E}{e} \right)^4 \frac{2^4}{(i-n')(i-n'+1)i^3} \end{aligned} \right.$$

Der Abstand der letzten (i ten) Komponente von der ersten ist:

$$(IIb) \quad \Sigma \Delta \nu = \Delta \nu_{\omega} \left(\frac{E}{e} \right)^4 \frac{2^4}{i^3} (i-1).$$

Über dieses Spektralgebiet erstreckt sich eine i -Gruppe bzw. eine k -Gruppe, für die statt i k zu setzen ist.

Der Abstand der $(i-p)$ ten von der letzten (i ten) Komponente ist:

$$\Delta \nu_{\omega} \left(\frac{E}{e} \right)^4 \frac{2^4}{i^3} \frac{p}{p+1}.$$

$\Delta \nu_{\omega}$, die wichtige Größe der Sommerfeldschen Feinstrukturen, ist aus den Wasserstofflinien vorläufig nicht exakt zu bestimmen, da deren Feinstruktur nicht genügend analysiert ist. Aus dem hinreichend aufgelösten Funkenbild der Heliumlinie 4686 (p. 914) ergibt sich ein Wert

$$\Delta \nu_{\omega} = 0,9645 \pm 0,0045.$$

Dieser Wert von $\Delta \nu_{\omega}$ wird der theoretischen Berechnung sämtlicher Feinstrukturen der Helium- und Wasserstofflinien aus Fl. IIa und IIb zugrunde gelegt. Ihm entspricht der Wert $a^2 = 5,3146 \times 10^{-5}$ und $a = 7,2901 \times 10^{-3}$. Diese Werte dienen auch zur Berechnung der Relativitätskorrektion in Fl. Ia und Ib.

Die beobachteten Linien des Heliums und ihre theoretische Einordnung.

Allgemeines. — Es wird zunächst die am besten aufgelöste 4686-Gruppe behandelt. Von den übrigen Gruppen konnten infolge mangelhafter Auflösung immer nur vereinzelte Komponenten isoliert beobachtet werden. Diese sind meist sehr schwach. Die starken beobachteten Komponenten bilden Übereinanderlagerungen mehrerer theoretischer. Die theoretische Einreihung dieser Gruppen ist daher nur eine unvollkommene.

Die Diskussion aller beobachteten Gruppen ergab für das Heliumspektrum eine gute Übereinstimmung mit der Theorie für den Wert

$$N_{\text{He}} = 109\,722,144 \pm 0,04 \text{ (mögl. Fehler).}$$

Der Kürze und Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns auf einen Vergleich der Beobachtungen mit den Berechnungen nach Formel (Ib) mit diesem Werte.

Die Gruppe 4686 im Funken- und Gleichstrombild.

Man kann die Kathodenkastenlampe entweder mit Gleichstrom oder mit Funkenentladungen betreiben. Im letzteren Falle liegt sie in Serie mit einer Funkenstrecke und erhält Entladungen einer Leidener Flasche von der Kapazität 500 bis 2000 cm, deren Belegungen mit den Polen eines mittleren Induktoriums verbunden sind. Der Kasten ist Kathode dieser „Flaschenfunkenentladung“. Auch hier leuchtet nur das Innere des Kastens, und zwar bei sehr kleiner Funkenstrecke intensiv orange (bei Gleichstrom blaugrau). Die D_3 -Linie und ihre Serie erscheint dabei sehr verstärkt und mit verbreiterten Linien. Außerdem sind die Grundlinien der Bohrschen Hauptserie 4686 und 3203 abermals verstärkt und die Glieder bis 2511 in derselben Stärke wie beim Gleichstrom vorhanden. Diese Glieder konnten mit dem großen Gitter photographiert werden. Die letzten Linien der Hauptserie und alle der Nebenserie sind bei dieser Art der Entladung schwächer als bei Gleichstrom und wurden mit einem kleineren Gitterspektrographen aufgenommen. Nur von 4859, 4541 und 4339 erhielt man im Flaschenfunkenpektrum des großen Gitters schwache Andeutungen.

Bei kurzer Funkenstrecke sind alle Komponenten aller Gruppen verbreitert. Von 3203 sind die zwei stärksten Kom-

ponenten des Gleichstrombildes nicht mehr getrennt. Mit Verlängerung des Funkens nimmt die Intensität aller Bohrlinien stark ab, um so mehr, je höher ihre Ordnungsnummer ist. Nur 4686 bleibt lichtstark. Ihre Komponenten werden schärfer. Die bei winziger Funkenlänge infolge Verbreiterung der Komponenten schlechter als bei Gleichstrom aufgelöste Gruppe erscheint bei einer Funkenlänge von 6 mm besser definiert. Die isolierten Komponenten sind sehr schmal geworden, und die breiteren zeigen deutlichen Zerfall in mehrere. Im Funkenbilde III. Gitterordnung von 4686 ist die Sommerfeldsche Feinstruktur am besten realisiert. Es wird daher zuerst behandelt.

Das Funkenbild sieht ganz anders aus, als das Gleichstrombild der Gruppe 4686. Man glaubte sogar, andere Werte der Aufspaltung der Komponenten annehmen zu müssen. Es stellte sich indessen heraus, daß der Unterschied nur die Intensitäten, aber nicht die Lage der Komponenten betrifft. Von den Komponenten der theoretischen Feinstruktur sind im Funken andere verstärkt als im Gleichstrom.

Die übrigen Liniengruppen sind im Funken unschärfer als im Gleichstrom. Daher kam für ihre feinere Analyse allein das Gleichstrombild in Betracht.

Gruppe 4686.

Beobachtet in II.—IV. Ordnung, best. definiert in III. Ordnung, gemessen gegen die Heliumdoppellinie:

4713,143 stark und 4713,373 schwach,
und ihre Gittergeister.

Diese bestimmt gegen Buisson und Fabrys Normalen:

4647,497; 4678,855; 4707,287; 4736,785

mit kleinerem Fehler als 0,002 Å.-E.

Frühere Messungen:

Runge u. Paschen ¹⁾	Rowl. Å.-E. 4713,252	4713,475
	— 0,178	— 0,178
	intrn. Å.-E. 4713,074	4713,297
Rayleigh ²⁾	4713,144	} stärkere Linie
Eversheim ³⁾	4713,154	

1) C. Runge u. F. Paschen, *Astrophys. Journ.*, Januar 1896. p. 4.
Zahlen nach Kayzers Korrektionskurve korrigiert auf intern. Å.-E.

2) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* 15. p. 548. 1908.

3) H. Kayzers *Handbuch d. Spektroskopie* 5. p. 520. 1910.

Außerdem wurde in III. und IV. Ordnung die im Kasten emittierte Aluminiumlinie 4663,054 (gegen Helium bestimmt) zur Messung herangezogen.

Funkenbild.

Theor.	Int.	$\lambda_{\text{Luft}} \text{ \AA.-E.}$ 468	mögl. Fehler ¹⁾	Bemerkungen
I d	0	6,050 ₀	0,01	kaum zu sehen
II d	0,5	5,926 ₃	0,004	
Ia, II c	7	5,803	0,003	Breite 0,059 \AA.-E. Spurenweise Auflös.
Ia	7	5,808 ₃	0,003	an einigen Stellen gibt
II c	6	5,774 ₄	0,006	diese Werte.
				Int. durch Licht von Ia wohl verstärkt
IIa, b	6	5,700	0,005	Breite 0,059 \AA.-E. Spurenweise Auflös.
II b	5	5,717 ₃	0,01	an einigen Stellen gibt
IIa	6	5,687 ₇	0,006	diese Werte.
III d	0	5,549 ₀	0,005	kaum zu sehen
III c	0,5	5,397 ₈	0,005	
IIIa, (b)	4	5,307 ₃	0,002	scharf, Breite 0,027 \AA.-E.

Theoret. Berechnung nach Ib für $i = 3$, $k = 4$.

$$\begin{aligned}
 N_{\text{He}} &= 109722,144 \\
 N_{\text{He}} \alpha^2 (1/3^2 + 1/4^2) &= 1,0125 \\
 \nu_{3,4}/4 (1/3^2 - 1/4^2) &= 109723,1565 \\
 \nu_{3,4} &= 21335,058 \\
 \lambda_{\text{vak.}} &= 4687,121 \\
 \lambda_{\text{vak.}} \times N_{76,15}^{2)} &= 1,311 \\
 \lambda_{\text{Luft}} &= 4685,810
 \end{aligned}$$

λ_{Luft} entspricht $i = 3 + 0$, $k = 4 + 0$.

Feinstruktur nach IIb: $i = 3$, $k = 4$.

$$\Delta \lambda_{\infty} = 0,3645 \times 4687,1^2 \times 10^{-8} = 0,08007 \text{ \AA.-E.}$$

Schwingungsdifferenzen des positiven i -Terms (Triplet).

$n+1$	$n'-1$	n	n'	$\Delta \lambda \text{ in \AA.-E.}$
3	0	2, 1	$\Delta \nu_1 = \Delta \nu_{\infty} 16 \frac{2^4}{2 \times 3 \times 3^3} = 1,5802 \Delta \nu_{\infty}$	0,1265
2	1	1, 2	$\Delta \nu_2 = \Delta \nu_{\infty} 16 \frac{2^4}{1 \times 2 \times 3^3} = 3 \times 1,5802 \Delta \nu_{\infty}$	0,3796

1) Der absoluten Werte, relative genauer.

2) $N_{76,15} = n_{76,15} - 1$ vgl. Anhang.

Schwingungsdifferenzen des negativen k -Terms (Quartett).

$m+1, m'-1 - m, m'$	$\Delta \lambda$ in Å.-E.
4, 0 — 3, 1 $\Delta \nu_1 = \Delta \nu_{co} 16 \frac{2^4}{3 \times 4 \times 4^3} = \frac{1}{3} \Delta \nu_{co}$	0,0267
3, 1 — 2, 2 $\Delta \nu_2 = \Delta \nu_{co} 16 \frac{2^4}{2 \times 3 \times 4^3} = \frac{2}{3} \Delta \nu_{co}$	0,0584
2, 2 — 1, 3 $\Delta \nu_3 = \Delta \nu_{co} 16 \frac{2^4}{1 \times 2 \times 4^3} = \frac{6}{3} \Delta \nu_{co}$	0,1601

Aus den beobachteten Komponenten des Funkenbildes und zweier des Gleichstrombildes ist der Wert von $\Delta \nu_{co}$, wie folgt ermittelt.

	$\Delta \lambda$ Å.-E. beob.	entspricht	daraus $\Delta \lambda_{co}$ Å.-E.	Gewicht
IIIa—IIIc	0,0906	$\Delta \lambda_{co}$	0,09060	0
IIIa—IIId	0,2418	3 $\Delta \lambda_{co}$	0,08060	2
IIIa—IIa	0,3805	3 $\times 1,5802 \Delta \lambda_{co}$	0,08027	3
IIIa—Ia	0,5011	4 $\times 1,5802 \Delta \lambda_{co}$	0,07926	5
IIa—IIb	0,0296	$\frac{1}{2} \Delta \lambda_{co}$	0,0888	0
IIa—IIc	0,0867	$\Delta \lambda_{co}$	0,0867	0
IIa—IIId	0,2385	3 $\Delta \lambda_{co}$	0,0795	2
Ia—IId	0,2417	3 $\Delta \lambda_{co}$	0,08057	2
IIIa—IIIc	0,0811	$\Delta \lambda_{co}$	0,0811	1
IIIa—IIId	0,2426	3 $\Delta \lambda_{co}$	0,08087	2

Funkenbild

Funken- und Gleichstrombild

Angenommen Mittel: 0,08007 mögl. Fehler 0,0010 Å.-E.

$$\Delta \nu_{co} = \frac{0,08007}{4637,0^3} \times 10^8 = 0,3645 \text{ mögl. Fehler } 0,0045 \text{ cm}^{-1}.$$

Schema 468.

m, m'	4, 0	3, 1	2, 2	1, 3
n, n'	a	b	c	d
3, 0	I <u>5,810</u>	5,837	5,890	<u>6,050</u>
2, 1	II <u>5,684</u>	<u>5,710</u>	<u>5,764</u>	<u>5,924</u>
1, 2	III <u>5,304</u>	<u>5,331</u>	<u>5,384</u>	<u>5,544</u>

Die beobachteten Komponenten sind unterstrichen. Die erste Kolonne der Wellenlängentabelle ist damit in Übereinstimmung.

Nicht beobachtet sind Ib und Ic. Ib kann der Breite von 5,803 nach noch schwach da sein. Von Ic ist nichts bemerkt. Daß Id trotzdem spurenweise gesehen ist, ist kein Widerspruch, weil diese Komponente isoliert liegt und dann selbst bei geringerer Intensität leichter bemerkt wird.

IIIb ist nicht besonders bemerkt, kann aber, da theoretisch nur um 0,027 Å.-E. von IIIa entfernt, da sein. Das Aus-

sehen des roten Randes von IIIa läßt das zu. IIIa selbst hat aber bei weitem die größte Intensität der zugehörigen k -Komponenten. 5,307 beob. kann nicht anders gedeutet werden als IIIa, ohne daß das Schema dieser Gruppe und damit die theoretische Einordnung aller anderen Gruppen in Unordnung gerät. Die Energievermehrung im Parameter m' von $m' = 0$ auf $n' = 2$ ist hiernach möglich.

Gleichstrombild.

	λ_{Luft} 468	Int.	
Id	6,028	0,5	schwach, aber noch deutlich
Ic, IId	5,905	2	Breite 0,039 Å.-E.
Ia, b IId	5,809	7	" 0,049 "
II(a)b	5,703	7,5	{ " 0,051 je nach Belichtung u. Ordnung " Werte zwischen 5,693 und 5,707
IIId	5,549,	1	Breite 0,060 Å.-E. unscharf
IIId	5,388,	3	" 0,048

Fehler der absoluten Werte kleiner als 0,002 Å.-E., der Wellenlängendifferenzen kleiner als 0,001 Å.-E. Beide Angaben sind für die theoretische Deutung bei den Überlagerungen wertlos.

Das Gleichstrombild unterscheidet sich vom Funkenbild nur durch andere Intensitäten der Komponenten.

Die in m' höherwertigen Komponenten des k -Terms sind verstärkt, besonders bei II. Die Gruppe II des i -Terms 2,1 hat die überwiegende Intensität. 5,703 ist die stärkste Komponente der ganzen 4686-Gruppe im Gleichstrom. Sie ist stärker als 5,809, obwohl hier Ia und noch zwei weitere Komponenten übereinander fallen. Die Komponente IIIa (b) 5,307, im Funken stark, fehlt hier völlig. Ihre Energie ist auf IIIc übergegangen. IIId ist bedeutend stärker als im Funken, aber diffus, d. h. schlecht definiert. Die starke Abweichung zwischen Id im Funken- und Gleichstrombilde ist nicht geklärt. Die Einzelmessungen gaben für diese im Funken kaum bemerkbare, bei Gleichstrom schwache Komponente Werte

im Gleichstrom zwischen 6,02 und 6,04,

„ Funken „ 6,02 „ 6,06.

Im Funken entsprechen die Intensitäten der Grundlinien der drei i -Gruppen theoretischer Erwartung. Aber die anschließenden k -Gruppen sind sehr schwach. Im Zu-

sammenhang hiermit erscheint die Tatsache, daß auch die ganze Nebenserie $i = 4$ stark abgeschwächt ist. Im Gleichstrom sind die k -Gruppen zusammen mit den Linien der Nebenserie $i = 4$ stärker geworden.¹⁾ Aber die Intensität der i -Gruppen ist nicht mehr die theoretisch erwartete. Die theoretische Erwartung über die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Elektronensprünge und die daraus folgenden Intensitätsverhältnisse bilden indessen keinen wesentlichen Punkt der Sommerfeldschen Theorie. Obige Beobachtungen zeigen, daß alle Elektronensprünge vorkommen, daß also $m \geq n$ und $m' \geq n'$ keine notwendigen Bedingungen sind. Im Gleichstrombild

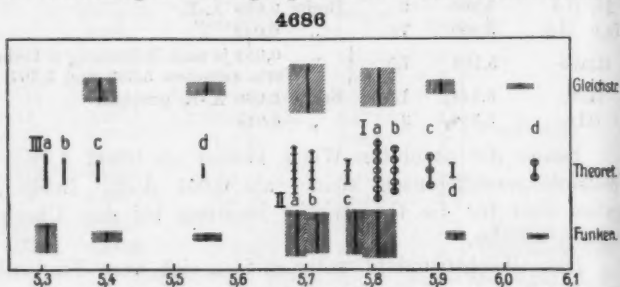


Fig. 2.

scheint allerdings der Fall $m' < n'$ nicht verwirklicht zu sein, dem beim Funken z. B. die starke Komponente 5,307 entspricht. Es wäre dann die Komponente 5,703 als IIb anzusehen ohne Gegenwart von IIa. Dies wäre neben der Verstärkung der k -Gruppen und der anomalen Intensität der i -Gruppen der dritte Unterschied zwischen dem Gleichstrom- und Funkenbilde.

In der Fig. 2 sind aufgezeichnet: in der Mitte die theoretischen 12 Komponenten, ihre Intensitäten durch die Länge dargestellt. Oben das Gleichstrombild, wie es im vergrößerten Bilde bei der Messung aussah, mit richtiger Breite der gemessenen Komponenten, unten ebenso das Funkenbild.

1) *Anm. b. d. Korrekt.* Nach neuen Versuchen sind die in m' höherwertigen k -Komponenten bei sehr niedrigem Druck und schwachem Gleichstrom (0,03 Amp.), also bei störungsfreien Schwingungen intensiver. Dabei war die schwächste Komponente Id deutlicher und wurde gemessen als 6,042, in besserem Einklang mit dem Funkenbild und dem Schema.

Die erwähnten Eigenschaften der Gruppe 4686 und die Unterschiede im Gleichstrom und Funken sind an den Reproduktionen der Tafel (mit Lupe) zu sehen. Es sind Vergrößerungen der III. Ordnung.

Weitere Gruppen der Hauptserie ($i = 3$).

Gruppe 3203.

Beobachtet in II.—IV. Ordnung, best. definiert in IV. Ordnung, gemessen gegen die Heliumlinie 3187,742 und ihre Gittergeister

Rowl. Å.-E.

Int. Å.-E.

Runge und Paschen . . . 3187,830 — 0,130 = 3187,700.

Letztere bestimmt gegen Buisson und Fabrys Eisennormalen 3125,661, 3175,447, 3225,790.

Gleichstrombild.

	λ _{Luft} Å.-E. 320	Int.	Bemerkung	theoret.	beob.—theor.
I(d), e	3,223	0	sehr schwach	{ (3,190) 3,223	{ (+,033)? —,005
Ia, b, IIe	3,165	7	Breite 0,027 Å.-E.	3,163	—,003
IIb, (c, d)	3,111	8	" 0,025 " ¹⁾	3,111	,000
IIIc	2,996	0,5	unscharf	2,992	+ ,004
IIIc, d	2,952	4	Breite 0,018 Å.-E.	2,947	+ ,005

1) Spurenweise aufgelöst in 3,120 und 3,108.

Mögl. Fehler kleiner als 0,002 Å.-E. (wegen Überlagerungen bedeutungslos).

Funkenbild.

Nur zwei unscharfe Komponenten: eine starke breite 3203,140 Å.-E. (stärkste Schwärzung) und eine schmalere schwächere bei 3202,964 Å.-E.; erstere Übereinanderlagerung von mindestens Ia, b und IIa, b, letztere von allen Linien der k-Gruppe III. Die Wellenlänge des Schwerpunktes der stärkeren Komponente und ihr Aussehen deutet an, daß hier Ia stärker ist als IIa, im Gegensatz zum Gleichstrombilde und im Einklang mit der 4686-Gruppe.

Theoretische Berechnung nach Ib für $i = 3$, $k = 5$:

$$\begin{aligned}
 N_{\text{He}} &= 109722,144 \\
 N_{\text{He}} \alpha^2 (1/3^2 + 1/5^2) &= 0,881 \\
 \nu_{3,5} / 4 (1/3^2 - 1/5^2) &= 109723,0252 \\
 \nu_{3,5} &= 31210,105 \\
 \lambda_{\text{vak.}} &= 3204,0903 \\
 \lambda_{\text{vak.}} \times N_{7,15} &= 0,9235 \\
 \lambda_{\text{Luft}} &= 3203,1668 \text{ entspricht } i = 3 + 0, k = 5 + 0
 \end{aligned}$$

Feinstruktur nach IIb für $i = 3, k = 5$:

$$\Delta \lambda_{\omega} = 0,3645 \times 3204,1^3 \times 10^{-8} = 0,03742 \text{ \AA.-E.}$$

Die Schwingungsdifferenzen des positiven i -Terms analog der Rechnung p. 913 geben die Wellenlängendifferenzen des Triplets bei 3203: $\Delta \lambda_1 = 0,0591, \quad \Delta \lambda_2 = 0,1774.$

Schwingungsdifferenz des negativen k -Terms (Quintett):

$m+1, m'-1-m, m'$					in Wellenl.	
5,	0	— 4, 1	$\Delta \nu_1 = \Delta \nu_{\omega} 16 \frac{2^4}{4 \times 5 \times 5^3} = 3 \times 0,03413 \Delta \nu_{\omega}$		0,0038	Å.-E.
4,	1	— 3, 2	$\Delta \nu_2 = \Delta \nu_{\omega} 16 \frac{2^4}{3 \times 4 \times 5^3} = 5 \times 0,03413 \Delta \nu_{\omega}$		0,0064	"
3,	2	— 2, 3	$\Delta \nu_3 = \Delta \nu_{\omega} 16 \frac{2^4}{2 \times 3 \times 5^3} = 10 \times 0,03413 \Delta \nu_{\omega}$		0,0128	"
2,	3	— 1, 4	$\Delta \nu_4 = \Delta \nu_{\omega} 16 \frac{2^4}{1 \times 2 \times 5^3} = 30 \times 0,03413 \Delta \nu_{\omega}$		0,0388	"

Schema 320.

m, m'	5, 0	4, 1	3, 2	2, 3	1, 4
n, n'	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
3, 0	I 3,167	3,171	3,177	3,190	3,228
2, 1	II 3,108	3,111	3,118	3,131	3,169
1, 2	III 2,930	2,934	2,941	2,953	2,992

3203

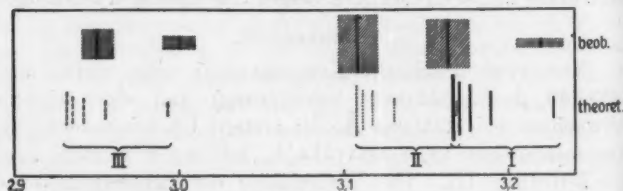


Fig. 3.

Die beobachteten Komponenten werden nach Kolonne I richtig zugeordnet sein. Die Abweichungen sind geringfügig, besonders wenn man bedenkt, daß 3,165 wohl zu klein gemessen sein wird, weil sie in der diffusen, nach Rot hin abnehmenden Schwärzung liegt, welche die stärkere Komponente 3,111 in ihrer Nachbarschaft erzeugt. Fig. 3 enthält eine Zeichnung der beobachteten Komponenten in richtiger Breite und der theoretischen Feinstruktur. Eine Reproduktion der IV. Ordnung findet sich auf Tafel V.

Die Gruppe II ist hier noch mehr verstärkt als beim Gleichstrombild von 4686. Der Intensitätsunterschied zwischen 3203,111 und 3,165 ist größer als bei den entsprechenden Komponenten 4685,703 und 5,809.

Gruppe 2733.

Gemessen gegen die Heliumlinien 2763,800, 2723,191, 2696,119.

	Rowl.-Å.-E.	Int. Å.-E.
Runge und Paschen	2763,900 - 0,102 =	2763,798
	2723,275 - 0,100 =	2723,175
	2696,230 - 0,098 =	2696,132

Die Heliumlinien gemessen gegen die Eisennormalen von Buisson und Fabry: 2778,225, 2739,550, 2714,419, 2679,065. Gemessen in II., III. und IV. Ordnung, best. definiert (starke Gruppe aufgelöst) in III. und IV. Ordnung.

	$\lambda_{\text{Luft}} \text{ Å.-E.}$	Int.
	273	
II f, Ia, b	3,345	2
II b	3,307	3
III c, d, e	3,189	1

Möglicher Fehler 0,003 Å.-E.

Berechnung: $i = 3$, $k = 6$:

$$\begin{aligned}
 N_{\text{He}} &= 109722,144 \\
 N_{\text{He}} \alpha^2 (1/3^2 + 1/6^2) &= 0,810 \\
 \nu_{3,6} / 4(1/3^2 - 1/6^2) &= 109722,954 \\
 \nu_{3,6} &= 36574,318 \\
 \lambda_{\text{vak.}} &= 2734,1591 \\
 \lambda_{\text{vak.}} \times N_{70,15} &= 0,8078 \\
 \lambda_{\text{Luft}} &= 2733,3513
 \end{aligned}$$

Feinstruktur nach II b für $i = 3$, $k = 6$:

$$\Delta \lambda_{\infty} = 0,3645 \times 2734,2^2 \times 10^{-8} = 0,02728 \text{ Å.-E.}$$

Die Schwingungsdifferenzen des positiven i -Terms, berechnet wie p. 913 geben die Wellenlängendifferenzen:

$$\Delta \lambda_1 = 0,0430, \quad \Delta \lambda_2 = 0,1291.$$

Schwingungsdifferenzen des negativen k -Terms (Sextett):

$m+1, m'-1-m, m'$						in Wellenl.
6, 0 — 5, 1	$\Delta \nu_1 = \Delta \nu_{\omega} 16$	$\frac{2^4}{5 \times 6 \times 6^3} = \frac{16}{405}$	$\Delta \nu_{\omega}$	0,0011 Å.-E.		
5, 1 — 4, 2	$\Delta \nu_2 = \Delta \nu_{\omega} 16$	$\frac{2^4}{4 \times 5 \times 6^3} = \frac{24}{405}$	$\Delta \nu_{\omega}$	0,0016 „		
4, 2 — 3, 3	$\Delta \nu_3 = \Delta \nu_{\omega} 16$	$\frac{2^4}{3 \times 4 \times 6^3} = \frac{40}{405}$	$\Delta \nu_{\omega}$	0,0027 „		
3, 3 — 2, 4	$\Delta \nu_4 = \Delta \nu_{\omega} 16$	$\frac{2^4}{2 \times 3 \times 6^3} = \frac{80}{405}$	$\Delta \nu_{\omega}$	0,0053 „		
2, 4 — 1, 5	$\Delta \nu_5 = \Delta \nu_{\omega} 16$	$\frac{2^4}{1 \times 2 \times 6^3} = \frac{240}{405}$	$\Delta \nu_{\omega}$	0,0162 „		

Schema 273.

m, m'	6, 0	5, 1	4, 2	3, 3	2, 4	1, 5
n, n'	a	b	c	d	e	f
3, 0	I 3,351	3,352	3,354	3,357	3,362	3,378
2, 1	II 3,308	3,309	3,311	3,314	3,319	3,335
1, 2	III 3,179	3,180	3,182	3,185	3,190	3,206

Die Übereinstimmung genügt bei der zweiten und bei der schwachen dritten Komponente, aber auch bei der ersten, welche nahe bei der starken mittleren zu klein gemessen sein wird.

Die Komponente II ist gegenüber I noch mehr verstärkt als bei 3203.

Gruppe 2511.

Gemessen in IV. Ordnung gegen die II. Ordnung der Heliumlinie 5015,680 nach Rayleigh (5015,683 Eversheim) und mit der Ordnungskorrektur $-0,002$ versehen (vgl. Anhang). Auch gemessen in III. und V. Ordnung gegen die in der Kastenlampe emittierten Siliziumnormalen 2506,904 und 2528,516 von Buisson und Fabry. Letztere Werte waren aber um 0,009 Å.-E. höher als die auf 5016 bezogenen und wegen der Ordnung korrigierten. Da die Siliciumlinien wahrscheinlich von der Glaswand stammten und daher nicht im Inneren des Kastens emittiert waren, wurden diese Werte verworfen. Denn die genaue Vergleichung zweier Wellenlängen erfordert exakt gleiche Lichtfüllung des benutzten Strahlenbündels.

	Ia, b	IIb, c	IIe, f
Int. . . .	2	3	1
λ_{Luft} . . .	2511,249	2511,216	2511,117
Mögl. Fehler	0,004	0,004	0,002

Falls die zwei starken Komponenten nicht getrennt waren, wurde als Schwerpunkt 2511,231 gemessen.

Berechnung $i = 3$, $k = 7$:

$$\begin{aligned}
 N_{\text{He}} &= 109722,144 \\
 N_{\text{He}} \alpha^2 (1/3^2 + 1/7^2) &= 0,766 \\
 \nu_{3,7} / 4(1/3^2 - 1/7^2) &= 109722,910 \\
 \lambda_{3,7} &= 39808,7655 \\
 \lambda_{\text{vak.}} &= 2512,0097 \text{ \AA.-E.} \\
 \lambda_{\text{vak.}} \times N_{76,16} &= 0,7554 \text{ ''} \\
 \lambda_{\text{Luft}} &= 2511,2543 \text{ ''}
 \end{aligned}$$

Feinstruktur $i = 3$, $k = 7$:

$$\Delta \lambda_{\infty} = 0,3645 \times 2512,0^2 \times 10^{-8} = 0,02300 \text{ \AA.-E.}$$

Die Schwingungsdifferenzen des positiven i -Terms, berechnet wie p. 913 geben die Wellenlängendifferenzen:

$$\Delta \lambda_1 = 0,0364 \text{ und } \Delta \lambda_2 = 0,1090 \text{ \AA.-E.}$$

Schwingungsdifferenzen des negativen k -Terms (Septett):

$m+1, m'-1-m, m'$							in Wellenl.
7, 0	—	6, 1	$\Delta \nu_1 = \Delta \nu_{\infty} 16 \frac{2^4}{6 \times 7 \times 7^2}$	$= 1,481 \cdot 10^{-4} \Delta \nu_{\infty} \times 120$	0,0004 \AA.-E.		
6, 1	—	5, 2	$\Delta \nu_2 = \Delta \nu_{\infty} 16 \frac{2^4}{5 \times 6 \times 7^2}$	$= 1,481 \cdot 10^{-4} \Delta \nu_{\infty} \times 168$	0,0006 „		
5, 2	—	4, 3	$\Delta \nu_3 = \Delta \nu_{\infty} 16 \frac{2^4}{4 \times 5 \times 7^2}$	$= 1,481 \cdot 10^{-4} \Delta \nu_{\infty} \times 252$	0,0009 „		
4, 3	—	3, 4	$\Delta \nu_4 = \Delta \nu_{\infty} 16 \frac{2^4}{3 \times 4 \times 7^2}$	$= 1,481 \cdot 10^{-4} \Delta \nu_{\infty} \times 420$	0,0014 „		
3, 4	—	2, 5	$\Delta \nu_5 = \Delta \nu_{\infty} 16 \frac{2^4}{2 \times 3 \times 7^2}$	$= 1,481 \cdot 10^{-4} \Delta \nu_{\infty} \times 840$	0,0029 „		
2, 5	—	1, 6	$\Delta \nu_6 = \Delta \nu_{\infty} 16 \frac{2^4}{1 \times 2 \times 7^2}$	$= 1,481 \cdot 10^{-4} \Delta \nu_{\infty} \times 2520$	0,0087 „		

Schema 251.

m, m'	7, 0	6, 1	5, 2	4, 3	3, 4	2, 5	1, 6
n, n'	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
3, 0	I 1,254	1,255	1,255	1,256	1,258	1,261	1,269
2, 1	II 1,218	1,218	1,219	1,220	1,221	1,224	1,233
1, 2	III 1,109	1,109	1,110	1,111	1,112	1,115	1,124

Die nahen starken Komponenten haben wegen ihrer Nähe größere Fehler. Der Wert der dritten Komponenten deutet an, daß auch innerhalb der zu III gehörigen k -Gruppe die Intensität nach Rot, also nach größeren Werten des Parameters m' gerückt ist.

Gruppe 2385.

In III. Ordnung gemessen gegen 3613,640 Helium II. Ordnung und die Aluminiumlinien 2373,122 und 2367,051 III. Ordnung.

Die Messung gegen 3613,640 erforderte die Ordnungskorrektur $-0,002$.

3613,640 war gegen Buisson und Fabrys Normalen 3606,681 und 3640,391 bestimmt.

Runge und Paschen	3613,785
	<u>- 0,144</u>
	3613,641

Die Aluminiumlinien sind gegen die Heliumlinie 4713,143 gemessen (vgl. p. 912) und mit der Ordnungskorrektur $-0,002$ versehen.

Die Gruppe 2385 wurde auch in IV. Ordnung gegen Helium 3187,742 III. Ordnung (vgl. p. 917) gemessen und mit der Ordnungskorrektur $-0,002$ versehen. Doch war die Definition in III. Ordnung besser (wegen größerer Lichtstärke).

Int.	1	2	0,5
λ_{Luft}	2385,440	2385,414	2385,326
Mögl. Fehler	0,004	0,003	0,004

Wenn nicht getrennt, Schwerpunkt der zwei stärkeren Linien gemessen als 2385,424.

Berechnung $i = 3$, $k = 8$:

$$\begin{aligned} N_{\text{He}} &= 109722,144 \\ N_{\text{He}} \sigma^2 (1/3^2 + 1/8^2) &= 0,739 \\ \hline &109722,883 \end{aligned}$$

$$\nu_{23}/4(1/3^2 - 1/8^2) = 41908,0456$$

$$\lambda_{\text{vak.}} = 2386,1764 \text{ \AA. -E.}$$

$$\lambda_{\text{vak.}} \times N_{\text{He}} = 0,7271$$

$$\lambda_{\text{Luft}} = 2385,4493$$

Feinstruktur:

$$\Delta \lambda_{\infty} = 0,3645 \times 2386,2^{\circ} \times 10^{-8} = 0,02076 \text{ \AA.-E.}$$

Die Schwingungsdifferenzen des positiven i -Terms, berechnet wie p. 913, geben die Wellenlängendifferenzen:

$$\Delta \lambda_1 = 0,0328, \quad \Delta \lambda_2 = 0,0984 \text{ \AA.-E.}$$

Die k -Gruppen erstrecken sich mit 7 weiteren Komponenten nach Fl. IIb über ein Gebiet von

$$\Sigma \Delta \nu = \Delta \nu_{\infty} 16 \frac{2^4}{8^4} 7 = \frac{7}{16} \Delta \nu_{\infty} \text{ in Wellenl. von } 0,0099 \text{ \AA.-E.}$$

Schema.

n, n'	m, m'	8, 0	1, 7
3, 0	I	2385,449	5,459
2, 1	II	2385,416	5,426
1, 2	III	2385,318	5,328

Die Übereinstimmung mit der Beobachtung genügt.

Gruppe 2306.

In III. Ordnung bestimmt gegen Helium 3512,511 und 3447,590 II. Ordnung. Ordnungskorrektur $-0,0020$ (vgl. Anhang, Beispiel).

Runge und Paschen	Rowl. 3512,650	3447,734
	- 0,144	0,144
	Int. 3512,506	3447,590

Gemessen gegen Buisson und Fabrys Normalen 3513,820, 3485,344, 3445,155, 3399,337.

Von dem Triplett ist nur schwach eine einzige Linie zu sehen, die als Übereinanderlagerung von I und II aufzufassen ist:

$$\lambda_{\text{Lafé}} = 2306,215 \text{ mögl. Fehler } 0,007 \text{ \AA.-E.}$$

Die Berechnung für $i = 3, k = 9$ ergibt das Schema:

n, n'	m, m'	9, 0	1, 8
3, 0	I	2306,239	6,246
2, 1	II	6,209	6,215
1, 2	III	6,117	6,123

Die gemessene Linie fällt in die Gruppe II.

Die Nebenserie des Bohrschen Heliumspektrums ($i = 4$)

umfaßt die den Wasserstofflinien benachbarten und die Linien der Pickeringserie. Es liegt kein Grund vor, die Serie in zwei

zu teilen.¹⁾ Die Linien bilden der Feinstruktur und der Intensitätsabnahme nach eine einzige Serie. Nach Sommerfeld sind die Linien wegen des positiven i -Terms Quartette mit wegen des negativen k -Terms angelagerten komplizierteren Gebilden. Diese Feinstruktur konnte wegen der Lichtschwäche und der geringen Aufspaltung des Quartetts nicht vollständig beobachtet werden. Man mußte mit der I. und II. Gitterordnung vorlieb nehmen und fand im allgemeinen nur eine etwas unscharfe Komponente, in der die drei ersten Quartettlinien meist ohne Spur einer Auflösung übereinander lagen, konnte dagegen meistens die schwächste Komponente des Quartetts wieder angedeutet finden. Sie liegt genügend isoliert, um auch bei sehr geringer Intensität bemerkt zu werden.

Gruppe 6560.

Gemessen gegen H_α 6562,797 (vgl. p. 933), gegen Helium 6678,150 (Rayleighsche und eigene Bestimmung) und gegen die Neonlinien 6506,527, 6532,880, 6598,953, welche K. Meissner hier interferometrisch auf die rote Kadmiumlinie bezogen hat.

Es ist nur ein Maximum bei 6560,130 (möglicher Fehler 0,010) in I. Ordnung des großen Gitters beobachtet. Die Linie war zu schwach (wegen der photographischen Unwirksamkeit), als daß man eine Struktur oder eine Komponente hätte bemerken können.

Berechnung $i = 4$, $k = 6$:

$$\begin{array}{rcl}
 N_{H\alpha} & = & 109722,144 \\
 N_{H\alpha} \alpha^2 (1/4^2 + 1/6^2) & = & 0,5264 \\
 & = & 109722,6704 \\
 r_{4,6} / 4 (1/4^2 - 1/6^2) & = & 15289,2598 \\
 \lambda_{vak.} & = & 6561,9983 \\
 \lambda_{vak.} \times N_{7,6,15} & = & 1,8139 \\
 \lambda_{Luft} & = & 6560,1844
 \end{array}$$

Feinstruktur $i = 4$, $k = 6$:

$$\Delta \lambda_{\infty} = 0,3645 \times 6562,03 \times 10^{-8} = 0,1570 \text{ \AA.-E.}$$

1) Auch nicht für die Zweiteilung der Hauptserie und schließlich nicht für die Bezeichnungen „Haupt“- und „Neben“-Serie, von denen wichtige Merkmale hier fehlen.

i-Quartett-Wellenlängendifferenzen nach p. 914:

$$\Delta \lambda_1 = 0,0523, \quad \Delta \lambda_2 = 0,1046, \quad \Delta \lambda_3 = 0,3139 \text{ \AA.-E.}$$

Ausdehnung des *k*-Sextett-Gebildes nach p. 920 und Fl. IIb:

$$\Sigma \Delta \lambda = 0,1550 \text{ \AA.-E.}$$

Schema:

<i>n, n'</i>	<i>m, m'</i>	6, 0	1, 5
4, 0	6560,184	0,339	
3, 1	6560,132	0,287	
2, 2	6560,027	0,182	
1, 3	6559,714	9,869	

Die beobachtete Linie entspricht dem Beginne (6, 0) der II. *i*-Gruppe (3, 1) und dem Ende (2, 4—1, 5) der III. *i*-Gruppe (2, 2).

Gruppe 5411.

Nur in I. Ordnung bestimmt gegen Helium 2723,191, 2696,119 II. Ordnung (vgl. p. 919) sowie gegen die 2733-Gruppe II. Ordnung (vgl. p. 919). Ordnungskorrektur + 0,004 \AA.-E.

Int.	2	0
λ_{Luft}	5411,551	5411,290
Mögl. Fehler .	0,006	0,010

Die starke Komponente einmal spurenweise aufgelöst in 5411,581 Int. 2 und 5411,510 Int. 3.

Auf einigen Aufnahmen war Quecksilber 5460,742 (Pérot u. Fabry) zugegen. Gegen diese Linie gemessen, ergaben sich Werte, welche um 0,006 \AA.-E. höher sind als obige. Da aber der Quecksilberdampf während der Aufnahme nicht in gleicher Stärke und auch nicht allein im Inneren des Kastens leuchtete, sind die angegebenen Werte zuverlässiger.

Berechnung $i = 4, k = 7$:

$$\begin{aligned} N_{\text{He}} &= 109722,144 \\ N_{\text{He}} \alpha^2 (1/4^2 + 1/7^2) &= 0,483 \\ \nu_{4,7}/4 (1/4^2 - 1/7^2) &= 109722,627 \\ \nu_{4,7} &= 18473,7076 \\ \lambda_{\text{vak.}} &= 5413,0987 \\ \lambda_{\text{vak.}} \times N_{\text{He}} &= 1,5057 \\ \lambda_{\text{Luft}} &= 5411,5930 \end{aligned}$$

Feinstruktur $i = 4$, $k = 7$:

$$\Delta \lambda_{\infty} = 0,3645 \times 5413,1^2 \times 10^{-8} = 0,1067 \text{ \AA.-E.}$$

Wellenlängendifferenzen des i -Quartetts:

$$\Delta \lambda_1 = 0,0356, \Delta \lambda_2 = 0,0712, \Delta \lambda_3 = 0,2135 \text{ \AA.-E.}$$

Ausdehnung des k -Septetts

$$\Sigma \Delta \lambda = 0,0684 \text{ \AA.-E.}$$

Schema:

n, n'	m, m'	7, 0	1, 6
4, 0	5411,593	1,661	
3, 1	5411,557	1,626	
2, 2	5411,486	1,555	
1, 3	5411,273	1,341	

Die schwache Komponente fällt in die i -Gruppe 1,3 und entspricht etwa 1,3–3,4 (theor. 11,290 \AA.-E.). Die stärkere Komponente paßt in die i -Gruppe 2,2. Von den einzeln beobachteten Komponenten, in welche letztere aufgelöst wurde, paßt die schwächere in die i -Gruppe 3,1 und die andere in die 2,2.

Gruppe 4859.

Gemessen in I., II. und III. Ordnung gegen H , 4861,926 (p. 935) und gegen Helium 4921,931

Rayleigh	4921,930
Eversheim	4921,934
Runge und Paschen	4922,096
	- 0,178
	4921,918

letztere bezogen auf Buisson und Fabrys Eisennormalen 4966,104, 4919,006 4903,324, 4878,226, 4859,756.

Es wurde nur eine stärkere, etwas unscharfe, aber nicht weiter aufgelöste, und eine zweite, sehr schwache Komponente beobachtet:

Int.	2	0
λ_{Luft}	4859,842	4859,135
Mögl. Fehler	0,004	0,006

Berechnung $i = 4, k = 8$:

$$\begin{aligned}
 N_{\text{He}} &= 109722,144 \\
 N_{\text{He}} \alpha^2 (1/4^2 + 1/8^2) &= 0,456 \\
 \nu_{4,8} / 4 (1/4^2 - 1/8^2) &= 109722,600 \\
 \nu_{4,8} &= 20572,9875 \\
 \lambda_{\text{vak.}} &= 4860,7429 \\
 \lambda_{\text{vak.}} \times N_{70,15} &= 1,5574 \\
 \lambda_{\text{Luft}} &= 4859,3855
 \end{aligned}$$

Feinstruktur $i = 4, k = 8$:

$$\Delta \lambda_{\infty} = 0,3645 \times 4860,7^2 \times 10^{-8} = 0,08612 \text{ \AA.-E.}$$

Quartettendifferenzen:

$$\Delta \lambda_1 = 0,0287, \quad \Delta \lambda_2 = 0,0574, \quad \Delta \lambda_3 = 0,1722 \text{ \AA.-E.}$$

Das k -Oktett erstreckt sich über 0,0377 \AA.-E.

Schema:

n, n'	$m, m' \ 5, 0 \quad \dots \quad 1, 7$
4, 0	4859,386 9,423
3, 1	4859,357 9,394
2, 2	4859,299 9,337
1, 3	4859,127 9,165

Die schwache Komponente paßt in die i -Gruppe 1,3 und entspricht etwa 1,3—4,4 (theor. 9,133). Die starke Komponente entspricht einer Stelle zwischen den i -Gruppen 3,1 und 2,2.

Gruppe 4541.

Bestimmt in I. Ordnung gegen die Heliumdoppellinie 4471,479 und 4471,681 und ihre Gittergeister. Diese gemessen gegen Buisson und Fabrys Eisennormalen 4494,572, 4466,554, 4427,314.

Rayleigh 4471,482 stärkere Linie,
Eversheim 4471,493 „ „

Runge und Paschen 4471,646 und 4471,858
 - 0,172 - 0,172
 4471,474 4471,686

Gegen die I. Ordnung dieser Heliumlinien und ihrer Gittergeister wurden auch die Aluminiumlinien

 2269,097 und 2263,464
 Ordnungskorrekt. - 0,003 - 0,003
 2269,094 2263,461

bestimmt.

mittlere Intensitätsmaximum 1,612 liegt in der Mitte dieser Gruppen. Die schwache Komponente gehört der i -Gruppe 1,3 an. Ihr Platz darin kann wegen zu großer Meßfehler nicht näher bestimmt werden.

Gruppe 4339.

Gemessen in I., II. und III. Ordnung gegen H_γ 4340,465 (vgl. p. 935) und gegen die Heliumlinie 4387,931 und ihre Gittergeister. Letztere gemessen gegen Buisson und Fabrys Eisennormalen 4315,089, 4352,741, 4375,935, 4427,314.

$$\begin{array}{r} \text{Runge und Paschen} \quad 4388,100 \\ - \quad 0,166 \\ \hline 4387,934 \end{array}$$

Starke Komponente: Maximum 4338,694. Grenzen: 4338,729 und 4338,657. In III. Ordnung Andeutung einer Auflösung in die Komponenten 4338,667 Int. 1 und 4338,709 Int. 0,5.

Schwache Komponente: 4338,536, möglicher Fehler 0,007 Å.-E

Berechnung $i = 4$, $k = 10$:

$$\begin{array}{rcl} N_{\text{He}} & = & 109722,144 \\ N_{\text{He}} \alpha^2 (1/4^2 + 1/10^2) & = & 0,423 \\ \nu_{4,10} / 4 (1/4^2 - 1/10^2) & = & 109722,567 \\ \nu_{4,10} & = & 23041,739 \\ \lambda_{\text{vak.}} & = & 4339,9501 \\ \lambda_{\text{vak.}} \times N_{78,15} & = & 1,2184 \\ \lambda_{\text{Luft}} & = & 4338,7317 \end{array}$$

Feinstruktur $i = 4$, $k = 10$:

$$\Delta \lambda_{00} = 0,3645 \times 4339,9^2 \times 10^{-8} = 0,0687 \text{ Å.-E.}$$

Quartettendifferenzen:

$$\Delta \lambda_1 = 0,0229, \quad \Delta \lambda_2 = 0,0458, \quad \Delta \lambda_3 = 0,1373 \text{ Å.-E.}$$

Die k -Gruppe erstreckt sich über 0,0158 Å.-E.

Schema:

n, n'	m, m'	10, 0	1, 9
4, 0	4338,7317		8,748
3, 1	4338,709		8,725
2, 2	4338,663		8,679
1, 3	4338,5257		8,5415

Die starke Komponente entspricht wieder der Über-einanderlagerung der *i*-Gruppen 3,1 und 2,2 nach den gemessenen Rändern und ihrem Maximum. Die beiden angedeuteten Komponenten fallen je in den Anfang dieser zwei Gruppen, und es ist die 2,2-Gruppe die stärkere.

Die schwache Komponente gehört der 1,3-Gruppe an, und zwar einem höheren Werte m' (analog 5411 und 4859 und auch dem Gleichstrombilde von 4686).

Gruppe 4200.

Bestimmt in II. Ordnung gegen Helium 4168,965, 4143,759, 4120,817 stark, 4120,989 schwach, diese gemessen gegen Buisson und Fabrys Normalen 4233,615, 4191,441, 4147,677, 4134,685, 4118,552.

Runge und Paschen	4169,131	4143,919	4120,973	4121,143
	- 0,154	- 0,153	- 0,152	- 0,152
	<u>4168,977</u>	<u>4143,766</u>	<u>4120,821</u>	<u>4120,991</u>

und gegen die III. Ordnung der Heliumlinie 2829,076, diese gemessen gegen Buisson und Fabrys Normalen 2813,290, 2851,800, 2874,176. Die Wellenlänge der Heliumlinie wurde dabei zur Ordnungskorrektur um 0,0014 vergrößert.

Runge und Paschen	2829,173
	- 0,106
	<u>2829,067</u>

Von der schwachen Linie wurde nur die stärkere Komponente sicher gemessen zu 4199,857. Eine schwächere Komponente war spurenweise nur auf einer Platte zu sehen bei 4199,68.

Es muß bemerkt werden, daß man niedere Werte aus Aufnahmen erhielt, auf denen das II. Wasserstoffspektrum zugegen war. Eine Linie dieses Spektrums liegt nämlich bei 4199,781, wird von der schwachen und diffusen Bohrlinie nicht getrennt und erniedrigt ihre Wellenlänge bei der Messung. Der angegebene Wert ist aus Aufnahmen gewonnen, welche nichts vom II. Wasserstoffspektrum enthalten.

Berechnung wie bei den anderen Linien.

Schema $i = 4, k = 11$:

n, n'	$m, m' \ 11, 0$	$1, 10$
4, 0	4199,891	9,902
3, 1	4199,869	9,881
2, 2	4199,826	9,838
1, 3	4199,698	9,709

Die gefundene Wellenlänge entspricht der Übereinanderlagerung der Gruppen 3,1 und 2,2. Die gemessene schwache Komponente paßt kaum in die 1,3-Gruppe und ist wohl zu verwerfen.

Gruppe 4100.

In I. Ordnung gemessen gegen H_β 4101,735 (vgl. p. 935) und die Heliumlinien 4168,965, 4149,759, 4120,817 (p. 930). Eine schwache Komponente bei 4100,049, auf einer Platte Spur einer weiteren noch schwächeren Komponente bei 4099,913.

Berechnung wie früher.

Schema $i = 4, k = 12$:

n, n'	$m, m' \ 12, 0$	$1, 11$
4, 0	4100,097	0,106
3, 1	4100,077	0,085
2, 2	4100,036	0,044
1, 3	4099,913	9,922

Die bei 0,049 gemessene Linie fällt wieder zwischen die Gruppen 3,1 und 2,2 und enthält diese übereinandergelagert. Die bei 9,913 beobachtete Komponente wird wohl zu verwerfen sein.

Bei allen Gruppen der Nebenserie fällt auf, daß die maximale Intensität nicht der 4,0-Gruppe angehört, sondern der zweiten, und bei den höheren Gliedern der dritten Gruppe. Dies entspricht der Intensitätsanomalie im Gleichstrombilde von 4686.

Das Relativitätsglied.

Die Relativitätskorrektur wird bestätigt, wenn man von 4686 zu einer der Nebenseriengruppen übergeht, z. B. zu der gut beobachteten bei 4839. Läßt man das Relativitätsglied (die eckige Klammer) in Bohrs Formel I fort und bestimmt

N_{He} aus 4686, so wird 4399 um 0,025 Å.-E. niedriger berechnet als mit Berücksichtigung der Relativität. Die Gruppe 1,3 des Schemas würde dann keinen Platz für die beobachtete schwache Komponente haben. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Gruppen 5411, 4859, 4541.

Nachdem die Deutung der beobachteten Gruppen besonders auf Grund der isolierten schwachen Komponenten und bezüglich der stärkeren im Einklang mit der Intensitätsverteilung im Gleichstrombilde der Hauptserienglieder vollzogen ist, kann man aus den Beobachtungen die Relativitätskorrektur berechnen und findet die richtige Größenordnung.

Das Schema der 4686-Gruppe (p. 914) ist aus dem Wert N_{He} abgeleitet, der zugleich die Beobachtungen an *allen* Heliumgruppen am besten darstellt. Wenn *nur allein* die Beobachtungen der 4686-Gruppe dargestellt werden sollen, würde ein besserer Anschluß erzielt durch Erhöhung der Werte des Schemas um 0,003 Å.-E. Als Wellenlänge der Komponenten Ia (3,0–4,0) folgt dann 5,813 statt 5,810, und die Übereinstimmung der beobachteten Komponenten mit denen des Schemas ist folgende:

	beob.	Schema	beob.—Schema $\frac{1}{1000}$ Å.-E.	Gewicht	
Id	6,050	6,053	- 3	1	} Funken
IId	5,926	5,927	- 1	1	
Ia	5,808	5,813	- 5	3	
Ic	5,774	5,767	+ 7	0	
IId	5,717	5,713	+ 4	1	
Ia	5,688	5,687	+ 1	1	
IIId	5,549	5,547	+ 2	1	
IIc	5,398	5,387	+ 11	1	
IIa	5,307	5,307	0	3	} Gleichstrom.
IIId	5,550	5,547	+ 3	1	
IIc	5,388	5,387	+ 1	2	
λ_{Luft}			=	4685,813 \pm 0,003	
				1,311	
$\lambda_{\text{Vak.}}$			=	4687,124	
$\nu_{\text{a.4}}$			=	21335,042	
$N_{\text{He, aus } \nu_{\text{a.4}}}$			$\frac{36}{7}$	= 109723,074 \pm 0,07	

Wird andererseits die bei 4399 beobachtete schwache Komponente 4338,536 \pm 0,007 dem mittleren Wert der Gruppe 1,3 zugeordnet, der im Schema 8,5336 beträgt, so folgt als

Wellenlänge der Komponente $4,0-10,0 \ 4338,7341 \pm 0,007$. Die anderen beobachteten Komponenten dieser Gruppe führen für die Kreisbahnenkomponente weniger sicher etwa auf 4338,732. Mit dem ersten Wert folgt:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{Luft}} &= 4338,7341 \pm 0,007 \\ &\quad 1,2184 \\ \lambda_{\text{vak.}} &= 4339,9525 \\ \nu_{4,10} &= 23041,726 \\ N_{\text{He}_{232}} &= \nu_{4,10} \frac{100}{21} = 109722,505 \pm 0,18\end{aligned}$$

Also:

$$\text{beob. } N_{\text{He}_{232}} - N_{\text{He}_{232}} = 0,569 \pm 0,25.$$

Nach Bohrs Relativitätsglied berechnet:

$$\begin{aligned}N_{\text{He}_{232}} - N_{\text{He}_{232}} &= N_{\text{He}} \alpha^2 \left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{10^2} \right) \right] \\ &= 1,0125 - 0,423 = 0,590.\end{aligned}$$

Die Balmerserie des Wasserstoffes.

H_α wurde von mir in I., II. und III. Ordnung bestimmt gegen die Eisennormalen 6490,859, 6494,994 von Buisson und Fabry, gegen Helium 6678,150 (nach Rayleighs und eigener Messung), ferner gegen folgende, hier von K. Meissner interferometrisch auf die rote Cadmiumlinie bezogene Neonlinien:

$$6506,527, \ 6532,880, \ 6598,953, \ 6678,275, \ 6717,042.$$

Wenn die Linie nicht aufgelöst war (in I. Ordnung z. B.), ergab sich ihr Intensitätsmaximum bei 6562,797 möglicher Fehler 0,004. War die Linie in ein Dublett aufgelöst (immer in III. Ordnung und meist auch in II. und I. Ordnung), so ergaben sich im Mittel die Wellenlängen 6562,853 und 6562,732. Die Messung war aber schwierig, und es ist wegen der übergreifenden Ränder der unscharfen Komponenten wahrscheinlich, daß der Abstand der eingestellten schwärzesten Stellen zu klein ist.

Hr. K. Meissner hat die Linie interferometrisch gut als Dublett aufgelöst gegen die rote Cadmiumlinie direkt gemessen. Er findet:

$$\begin{array}{cc}\text{Int. 7} & 5 \\ 6562,849 & \text{und } 62,725\end{array}$$

als Wellenlängen der Komponenten. Dies führt beim Intensitätsverhältnis 7:5, welches ungefähr richtig sein dürfte, zum Schwerpunkt 2,797. Die Linie ist wegen $i = 2$ ein Dublett von der Aufspaltung 0,1571 Å.-E. Jede Dublettkomponente ist wegen $k = 3$ Anfangslinie eines sich nach Rot erstreckenden Triplets von den Aufspaltungen

$$\Delta \lambda_1 = 0,01551 \text{ und } \Delta \lambda_2 = 0,04654 \text{ Å.-E.}$$

Die Kreisbahnenkomponente 2,0—3,0 wird etwas kleinere Wellenlänge haben als die beobachtete rote Komponente 2,849. Denn letztere ist als Schwerpunkt dieser und der Komponenten 2,0—2,1 aufzufassen, welche um 0,01551 Å.-E. voneinander entfernt sind. Beim Intensitätsverhältnis 3:1 dieser zwei Triplettkomponenten würde der Schwerpunkt um

$$\frac{1}{4} \cdot 0,0155 = 0,00388 \text{ Å.-E.}$$

höher liegen als die Kreisbahnenkomponente. Letztere hätte dann die Wellenlänge

$$2,849 - 0,0039 = 2,8451 \text{ Å.-E.}$$

Dies wird angenommen. Der Schwerpunkt der Meissner'schen Komponenten wäre 2,797. Der Abstand der Kreisbahnenkomponente von ihm ist 0,0481 Å.-E. Bei den übrigen Wasserstofflinien ist nur der Schwerpunkt beobachtet. Es ist die Korrektion Δ zu schätzen, welche bei ihnen auf die Kreisbahnenkomponente führt. Hierzu wird die Beziehung angenommen:

$$\Delta = \frac{1}{3} \Delta_1 - \frac{1}{4} \Delta_2.$$

Δ_1 ist die Dublettaufspaltung, Δ_2 die Aufspaltung der zwei stärksten Komponenten der k -Gruppe, bei H_α also des Triplets. Für H_α ergibt sich nämlich richtig:

$$\Delta H_\alpha = \frac{1}{3} 0,1571 - \frac{1}{4} 0,0155 = 0,048.$$

Diese geschätzte Beziehung wird auch für die anderen Linien nahe zutreffen. Die Hauptkorrektion muß proportional der richtigen Dublettaufspaltung sein. Sie ist aber zu vermindern um einen Betrag, der mit der Aufspaltung der stärksten Komponenten der k -Gruppe zunimmt, und der hier diesem Betrage proportional gesetzt ist. Dieser Betrag wird übrigens für die anderen Wasserstofflinien sehr klein.

	beob.	$\frac{1}{2}\Delta i$	$\frac{1}{2}\Delta k$	Δ	Kreisbahnen- komp.
H_α	6562,797	0,0524	0,0039	0,048	6562,845
H_β (Paschen)	4861,326	0,0287	0,0004	0,028	4861,354
H_γ (Meissner)	4861,329	„	„	0,0280	4861,357
H_δ	4340,465	0,0229	0,0001	0,0228	4340,4878
H_ϵ	4101,735	0,0204	0,00004	0,0204	4101,7554

H_β , H_γ , H_δ sind je gegen die nächsten Eisennormalen von Buisson und Fabry gemessen mit einem Fehler von etwa 0,004 Å.-E. Der zweite Wert für H_β entstammt einer interferometrischen Messung von K. Meissner.

Aus folgender Tabelle ist ersichtlich, wie die vorliegenden Resultate zur Gewinnung des ihnen entsprechenden Wertes von N_H verwertet sind.

Balmerserie $i = 2$.

	H_α $k = 3$	H_β $k = 4$		H_γ $k = 5$	H_δ $k = 6$
		Paschen	Meissner		
λ_{Lab}	6562,8451	4861,354	4861,357	4340,4878	4101,7554
$\lambda_{\text{Lab}} \times N_{H,15}$	1,8141	1,3576	1,3576	1,2188	1,1560
$\lambda_{\text{vak.}}$	6564,6592	4862,7116	4862,7146	4341,7066	4102,9114
$\nu = 1/\lambda_{\text{vak.}}$	15293,084	20564,662	20564,647	23082,415	24372,933
$\nu \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right)$	109678,205	109678,164	109678,084	109678,167	109678,198
$N \frac{a^3}{4} \left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{k^2} \right)$	0,526	0,455	0,455	0,423	0,405
N_ω	109677,679	109677,709	109677,629	109677,744	109677,793
Gew.	6	2	2	1	1

Mittel: $N_\omega = 109677,691 \pm 0,06$.

Es war

$$N_{H\epsilon} = 109722,144 \pm 0,04.$$

Nach Bohr kann M_ω/μ und e/μ hieraus bestimmt werden. Nach 2. und 3. p. 907 folgt:

$$\frac{M_\omega}{\mu} = \frac{N_{H\epsilon}}{N_{H\epsilon} - N_\omega} \frac{a-1}{a} - 1,$$

wenn $M_{H\epsilon}/M_\omega$, das auf Wasserstoff bezogene Atomgewicht des Heliums mit a bezeichnet wird. Wir nehmen an:

$$a = \frac{3,99}{1,008} = 3,9583.$$

Da ferner:

$$\frac{e}{M_{\omega}} = \frac{9649,4}{1,008},$$

so wird:

$$\frac{e}{\mu} = \frac{e}{M_{\omega}} \times \frac{M_{\omega}}{\mu} = \frac{9649,4}{1,008} \left(\frac{N_{\text{He}}}{N_{\text{He}} - N_{\omega}} \frac{2,9583}{3,9583} - 1 \right).$$

Man berechnet: $M_{\omega}/\mu = 1843,7$ und $e/\mu = 1,7649 \cdot 10^7$ in elektromagnetischem, also $5,2947 \cdot 10^{17}$ in elektrostatischem Maß. Der mögliche Fehler dieser spektroskopisch auf Grund der Bohrschen Theorie bestimmten Werte ist etwa 2,5 Prom.¹⁾ Der Wert

$$N_{\infty} = 109677,691 \left(1 + \frac{1}{1843,7} \right) = 109737,18 \pm 0,06$$

ist ein weiteres Resultat dieser Arbeit.

Nach 1. und 4. (p. 907) kann man nun auch aus den gefundenen Werten von N_{∞} , $\varepsilon = e/m$, $\Delta\nu_{\omega}$ bzw. α die universellen Konstanten e und h berechnen. Es ist:

$$e = \frac{\alpha^2 c^3}{4\pi N_{\infty} \varepsilon}, \quad h = \frac{\alpha^5 c^3}{8\pi N_{\infty}^2 \varepsilon^2}.$$

Mit den Werten $\alpha = 7,2901 \cdot 10^{-3}$ (p. 910), entsprechend $\Delta\nu_{\omega} = 0,3645$ (p. 914), $\varepsilon = 5,2947 \cdot 10^{17}$, $N_{\infty} = 109737,2$ ergibt sich:

$$e = (4,776 \pm 0,07) \cdot 10^{-10}, \quad h = (6,553 \pm 0,16) \cdot 10^{-27}.$$

Die Genauigkeit der spektroskopischen Bestimmung dieser beiden Größen ist aber gering wegen des großen möglichen Fehlers von $\Delta\nu_{\omega}$ (1,25 Proz.) bzw. α (0,63 Proz.). Die Berechnungen sind vollständig auch mit dem Werte 0,3608 durchgeführt und geben mit dem gesamten Beobachtungsmateriale dieser Arbeit dieselbe Übereinstimmung. Die übrigen Konstanten erhalten dann die Werte:

1) R. Fortrat (Comptes rend. 155. p. 1237. 1912) erhält für die magnetische Aufspaltung der Zinklinie 4680 den Wert

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 H} = 1,8712 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \text{ g}^{-1}.$$

Mit der Beziehung

$$\frac{1}{4\pi e} \frac{e}{m} = \frac{1}{4} \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 H}$$

folgt hieraus $e/m = 1,7636 \times 10^7$. Frühere Werte aus dem Zeemaneffekt: P. Weiss und A. Cotton, Journ. de Phys. Juni 1907 $1,767 \times 10^7$; P. Gmelin, Ann. d. Phys. 28. p. 1087. 1909 $1,771 \times 10^7$.

$\alpha = 7,253 \cdot 10^{-3}$, $N_{H\alpha} = 109722,185$, $N_{\infty} = 109677,696$,
 $N_{\infty} = 109737,22$, $e/m = 1,7688 \times 10^7$, also $\varepsilon = 5,2914 \times 10^{17}$
 und führen spektroskopisch zu den Werten:

$$e = 4,706 \times 10^{-10}, \quad h = 6,396 \times 10^{-27}.$$

Auch mit dem Werte $\Delta\nu_{\infty} = 0,368$ würde andererseits ungefähr die gleiche Übereinstimmung zwischen Rechnung und vorliegenden Beobachtungen zu erzielen sein, wobei die übrigen Werte ebensoviel nach der anderen Seite zu verändern wären. Man muß daher sagen, daß die oben aus $\Delta\nu_{\infty} = 0,3645$ berechneten Werte von e und h die bei ihnen angeführten Fehler haben können. Die obige spektroskopische Bestimmung dieser beiden Größen auf Grund der Sommerfeldschen Theorie scheint daher in der Genauigkeit anderen Methoden unterlegen. Indessen: Der Wert $\alpha = 7,253 \times 10^{-3}$ bzw. $\Delta\nu_{\infty} = 0,3608$ ist berechnet aus den neuen Werten von Millikan¹⁾ $e = 4,77 \times 10^{-10}$, $h = 6,57 \times 10^{-27}$ allein aus der Formel (4). Diese aber stehen im Widerspruche zu den spektroskopisch aus $\Delta\nu_{\infty} = 0,3608$ und N_{∞} folgenden obigen Werten von e und h . Sommerfeld, dem die Möglichkeit dieser spektroskopischen Bestimmung der universellen Konstanten zu verdanken ist, machte darauf aufmerksam, daß diese neuen Millikanschen Werte nicht beide zugleich richtig sein können: wegen des Wertes von N_{∞} . Wenn nach Millikan $e = 4,77 \times 10^{-10}$ angenommen wird, so ergeben unsere Werte von N_{∞} und ε nach der Formel

$$h = \sqrt[3]{\frac{2\pi^2 e^6}{c N_{\infty}^3}}, \quad h = 6,539 \times 10^{-27}$$

und $\alpha = 7,287 \times 10^{-3}$ bzw. $\Delta\nu_{\infty} = 0,3642$.

Hiermit sind unsere Werte in gutem Einklang.

Anhang.

Ordnungskorrektion.

Wenn man mit einem Beugungsgitter eine Wellenlänge λ_{μ} in μ ter Ordnung durch eine mit ihr koinzidierende Normale λ_{μ} ν ter Ordnung mißt, so bedarf λ_{μ} keiner Korrektion, wenn bei der Beobachtung die Luft einen Druck von 760 mm und eine Temperatur von 15° C. hat, da die Normalen Werte der

1) R. A. Millikan, Physik. Zeitschr. 17. p. 217. 1916.

Wellenlängen in solcher Luft sind. Ist aber bei der Beobachtung die Temperatur T^0 abs. und p mm der Druck der Luft, so darf man nur die in einer Ordnung ν beobachteten Wellenlängen λ_ν' mit den Werten λ_ν identifizieren. Eine mit ihr koinzidierende Wellenlänge λ_μ' μ ter Ordnung, welche der Bedingung genügt,

$$(1) \quad \mu \lambda_\mu' = \nu \lambda_\nu',$$

bedarf einer Korrektur Δ , um die auf 288° und 760 mm Druck bezogene Wellenlänge λ_μ richtig darzustellen.

$$\mu \lambda_\mu' + \Delta = \mu \lambda_\mu.$$

Bedeutet n_μ' und n_ν' die Brechungsexponenten der Luft für diese beiden Linien bei T^0 abs. und p mm, n_μ und n_ν diejenigen bei 288° abs. und 760 mm, so rückt $\mu \lambda_\mu'$ von $\nu \lambda_\nu'$ fort nach größeren Wellenlängen, wenn der Wert n' in den n verändert wird, um den Betrag:

$$\Delta = \mu(\lambda_\mu - \lambda_\mu') - \nu(\lambda_\nu - \lambda_\nu'),$$

oder wegen (1)

$$\Delta = \mu \lambda_\mu - \nu \lambda_\nu.$$

Da

$\lambda_\mu' \times n_\mu' = \lambda_\mu \times n_\mu = \lambda_\mu^0$ und $\lambda_\nu' \times n_\nu' = \lambda_\nu \times n_\nu = \lambda_\nu^0$,
wo λ^0 die Wellenlänge im Vakuum ist, so ist wegen (1)

$$(2) \quad \Delta = \mu \lambda_\mu' \left(\frac{n_\mu'}{n_\mu} - \frac{n_\nu'}{n_\nu} \right).$$

Es gilt

$$n' - 1 = (n - 1) \left(\frac{p}{760} \frac{288}{T} \right).$$

Setzt man $n - 1 = N$, so gilt:

$$n' = 1 + N \frac{p}{760} \frac{288}{T}, \quad n = 1 + N$$

und es wird (2):

$$(2a) \quad \Delta = \mu \lambda_\mu' \left(\frac{1 + N_\mu \frac{p}{760} \frac{288}{T}}{1 + N_\mu} - \frac{1 + N_\nu \frac{p}{760} \frac{288}{T}}{1 + N_\nu} \right).$$

Setzt man

$$\delta = \frac{760 T - p 288}{760 T}, \quad \frac{p}{760} \frac{288}{T} = 1 - \delta,$$

so folgt aus (2a):

$$\Delta = \mu \lambda_{\mu}' \left(1 - \frac{\delta N_{\mu}}{1 + N_{\mu}} - 1 + \frac{\delta N_{\nu}}{1 + N_{\nu}} \right).$$

Hier darf man im Nenner N_{μ} und N_{ν} gegen 1 vernachlässigen und erhält

$$(3) \quad \Delta = \mu \lambda_{\mu}' \delta (N_{\nu} - N_{\mu}).$$

Nach Kayser und Runge ist

$$N_{\nu} \frac{288}{273} = n_{\nu, 288} - 1 = A + B \lambda_{\nu}^{-2} + C \lambda_{\nu}^{-4} - 1$$

und

$$\frac{288}{273} (N_{\nu} - N_{\mu}) = B (\lambda_{\nu}^{-2} - \lambda_{\mu}^{-2}) + C (\lambda_{\nu}^{-4} - \lambda_{\mu}^{-4}),$$

wegen

$$\lambda_{\nu} = \lambda_{\mu} \frac{\mu}{\nu}$$

wird

$$\lambda_{\nu}^{-2} - \lambda_{\mu}^{-2} = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\mu^2} \lambda_{\mu}^{-2}$$

und

$$\lambda_{\nu}^{-4} - \lambda_{\mu}^{-4} = \frac{\nu^4 - \mu^4}{\mu^4} \lambda_{\mu}^{-4},$$

$$\frac{288}{273} (N_{\nu} - N_{\mu}) = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\mu^2} B \lambda_{\mu}^{-2} + \frac{\nu^4 - \mu^4}{\mu^4} C \lambda_{\mu}^{-4}.$$

Mit diesem Wert und dem von δ wird (3)

$$(3a) \quad \Delta = \mu \lambda_{\mu}' \frac{760 T - p 288}{760 T} \left(\frac{\nu^2 - \mu^2}{\mu^2} B \lambda_{\mu}^{-2} + \frac{\nu^4 - \mu^4}{\mu^4} C \lambda_{\mu}^{-4} \right) \frac{273}{288}.$$

Mißt man in der Klammer λ nach 10^{-3} mm, so ist nach Kayser und Runge:

$$B = 1,316 \times 10^{-6}, \quad C = 3,16 \times 10^{-8}.$$

Δ ist positiv, wenn die niedere Ordnung λ_{μ}' aus der höheren λ_{ν}' bestimmt wird, im umgekehrten Falle negativ.

Es ist

$$\lambda_{\mu} = \lambda_{\mu}' + \frac{\Delta}{\mu}.$$

Beispiel (vgl. p. 923):

Es sei eine Linie 2900 Å.-E. III. Ordnung bei 15° C. und 730 mm (Bedingung meiner Versuche) gegen Normalen in der II. Ordnung bei 3450 Å.-E. gemessen.

$$3 \times 2300 = 2 \times 3450;$$

$$\mu = 3, \nu = 2, \lambda_{\mu} = 0,230 \text{ (in der Klammer),}$$

$$T = 288, p = 730,$$

$$\Delta = 3 \times 2300 \times \frac{80}{760}$$

$$\left(-\frac{5}{9} \times 1,316 \times 10^{-6} \times 0,23^{-2} - \frac{65}{81} \times 3,16 \times 10^{-8} \times 0,23^{-4} \right) \frac{273}{288},$$

$$\Delta = -0,0059 \text{ \AA.-E.}$$

Es ist also die Wellenlänge 2300, welche als $\frac{2}{3}$ 3450 gefunden ist, um $\frac{0,0059}{3}$ zu erniedrigen. Umgekehrt wäre die Wellenlänge 3450 II. Ordnung, gegen Normalen der III. Ordnung als $\frac{3}{2}$ 2300 gemessen, um $\frac{0,0059}{2}$ zu vermehren.

Diese Ordnungskorrektion wurde im allgemeinen der Größenordnung nach bei Eisennormalen, welche aus verschiedenen Ordnungen stammten und nebeneinander lagen, als richtig befunden. Doch kamen auch vereinzelt Abweichungen vor, die trotz der Geringfügigkeit der Korrektion als sicher angesehen werden mußten, und deren Ursache nicht mit Sicherheit aufgedeckt wurde.

Wenn diese Arbeit über das Stadium unverstandenen Widerspruches mit Bohrs Theorie hinausgelangt ist, so verdankt sie dies der hilfreichen Förderung durch Hrn. Kollegen A. Sommerfeld, durch dessen unermüdliche Bemühungen es möglich wurde, in den unvollkommenen Experimentalergebnissen die wundervollen Gesetze seiner schönen Theorie zu erkennen. Hierfür sei Hrn. Kollegen Sommerfeld auch öffentlich mein herzlichster Dank ausgesprochen.

(Eingegangen 1. Juli 1916.)

3. Untersuchungen über den Schalldruck; von Fritz Küstner.¹⁾

§ 1.

Die Existenz des Schalldruckes ist von Lord Rayleigh²⁾ zuerst bewiesen worden und hat hauptsächlich Interesse erregt wegen der Analogie zu dem von der elektromagnetischen Strahlung ausgeübten Strahlungsdrucke.

Kürzlich hat nun Hr. Waetzmann³⁾ gefunden, daß neben dem konstanten Überdruck, der bei der Reflexion von Wellen an festen Wänden auftritt, auch noch neue Töne entstehen, deren Perioden in den Perioden der auffallenden Wellen nicht enthalten sind. Hr. Waetzmann erläutert speziell seinen Gedanken an einem besonders einfachen und experimentell wichtigen Falle, daß nämlich auf eine reflektierende Wand eine typische Schwebungswelle auftritt, die aus sich zwei Tonwellen von gleichen Amplituden und sehr wenig verschiedenen Wellenlängen zusammensetzt, wobei das Verhältnis der Schwingungszahlen der Primärtöne ein solches sein soll, daß ihr größter gemeinschaftlicher Teiler gleich der Schwebungszahl pro Sekunde ist. Nach der Meinung des Hrn. Waetzmann

1) Der Verfasser, der als Kriegsfreiwilliger ins Feld gezogen war, ist am 31. Januar 1916 einer im Felde erworbenen Infektion erlegen. In seinem Nachlasse fand sich der Inhalt der §§ 2—5 in Formeln fertig vor; den Inhalt des § 6 hatte er mir mündlich mitgeteilt. Ich habe bei der Darstellung lediglich ein etwas anderes Randwertproblem zugrunde gelegt, das dem Experiment mehr angepaßt ist, den sachlichen Inhalt aber in keiner Weise ändert, und den Inhalt des letzten Paragraphen rekonstruiert. Die Formulierung des im ersten Paragraphen wiedergegebenen Gedankenganges von Waetzmann rührt von Hrn. Waetzmann selbst her.

Cl. Schaefer.

2) Lord Rayleigh, Papers 5. p. 41ff. u. 262ff.

3) E. Waetzmann, Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterländ. Kultur 1913, naturwissenschaftl. Sektion, p. 32ff.; Verh. d. Deutschen Phys. Ges. 16. p. 424. 1914.

sei dann der Schalldruck im Maximum der Schwebungen größer als im Minimum, d. h. aber mit anderen Worten, daß neben dem konstanten Überdruck, dem Rayleighschen Schalldruck, in erster Linie noch ein Ton entsteht, dessen Periodenzahl gleich der Schwebungsanzahl ist, der Differenzton erster Ordnung.

Hr. Waetzmann weist auch darauf hin, daß Rayleigh den beschriebenen Effekt bei seiner Art der Berechnung des Schalldruckes nicht finden konnte, weil Rayleigh nur den Mittelwert der Druckschwankungen berechnet. Im Gegensatz zu Rayleigh müsse vielmehr der gesamte zeitliche Verlauf des Druckes berechnet werden.

Diese Berechnung durchzuführen und damit dem Waetzmannschen Gedanken die exakte Formulierung zu geben, war der Zweck dieser Arbeit.

§ 2.

Wir gehen von den unverkürzten hydrodynamischen Gleichungen aus (denn von diesen ist der Ausgangspunkt zu nehmen, weil der Schalldruck ein zeitlicher Mittelwert über den hydrodynamischen Druck ist), die wir etwa der Helmholtzschen Abhandlung über Luftschwingungen in Pfeifen mit offenen Enden¹⁾ entnehmen, wobei wir lediglich auf den Fall spezialisieren, daß alle Größen nur von x und t (nicht von y und z) abhängen. Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, sondern wird direkt aus experimentellen Gründen nahegelegt. Wir haben also:

$$(1a) \quad \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2),$$

$$(1b) \quad - \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (hu).$$

Darin bedeutet P die Potentialfunktion der äußeren Kräfte, p den hydrodynamischen Druck, h die Dichte, u die Geschwindigkeit parallel der x -Achse. Ferner setzen wir die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials voraus, so daß zu setzen ist:

$$(2) \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

1) H. Helmholtz, Wiss. Abhandl. 1. p. 303.

Setzt man (2) in (1) ein, so folgt:

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2,$$

$$(4) \quad - \frac{\partial h}{\partial t} = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Zu diesen Gleichungen muß nun noch für ein kompressibles Medium eine Beziehung zwischen p und h treten, für die wir der Einfachheit halber das Boylesche Gesetz (isothermer Fall)

$$(5) \quad p = a^2 \cdot h$$

annehmen; der adiabatische Fall läßt sich ganz analog behandeln.

Mit (5) werden nun (3) und (4):

$$(6) \quad \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{a^2}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2,$$

$$(7) \quad - \frac{\partial p}{\partial t} = p \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$(8) \quad P - a^2 \log \left(\frac{p}{p_0} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2,$$

$$(9) \quad - \frac{\partial}{\partial t} \left(\log \frac{p}{p_0} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \log \left(\frac{p}{p_0} \right).$$

Dabei bedeutet p_0 eine Konstante; setzt man aus (8) den Wert für p in die Gleichung (9) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[P - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ &+ \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[P - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

d. h. eine Gleichung, die lediglich die Funktion Φ enthält, und die ausgerechnet die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} &= a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

oder:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - a^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ist nun Φ aus dieser Gleichung bestimmt, so kann mittels (8) der hydrodynamische Druck und aus diesem der „Schalldruck“ berechnet werden.

§ 3.

Im allgemeinen werden in der Akustik die Größen P und Φ nebst ihren Ableitungen als unendlich kleine Größen erster Ordnung angesehen, deren Produkte, Quadrate und noch höhere Potenzen vernachlässigt werden. Die Gleichungen (8) und (10) werden in diesem Falle:

$$(11) \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - a^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$(12) \quad a^2 \log \left(\frac{P}{P_0} \right) = P - \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

die sich in dem speziellen Falle, daß keine äußeren Kräfte wirken, auf die folgenden reduzieren:

$$(13) \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - a^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0,$$

$$(14) \quad \log \left(\frac{P}{P_0} \right) = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Auch wir wollen zunächst diese verkürzten Gleichungen benutzen und sehen, welche Folgerungen aus ihr für den Schalldruck zu ziehen sind.

Wir betrachten — im engen Anschluß an das Experiment (Kundtsche Staubfiguren) — folgenden Fall:

Ein Rohr von der Länge l cm liege mit seiner Achse parallel der x -Achse. Das Ende $x=l$ sei durch eine starre Wand verschlossen, so daß dort die Geschwindigkeit zu allen Zeiten Null sein muß; also:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=l} = \Phi'(l) = 0.$$

Das offene Ende $x=0$ wird durch einen dicht abschließenden Stempel verschlossen, der von außen in eine Schwingung

$A \cdot \sin nt$ versetzt werden kann; diese Verrückung zwingt er der Luft am Ende des Rohres auf, so daß dort die Geschwindigkeit $\Phi'(0) = A \cdot n \cdot \cos nt$ sein muß. Während also im ganzen Rohre die Gleichung (13) gilt, gelten an den Enden bzw. die beiden Randbedingungen:

$$(15) \quad \text{für } x = 0: \Phi'(0) = A \cdot n \cdot \cos nt,$$

$$(16) \quad \text{für } x = 1: \Phi'(1) = 0.$$

Eine partikuläre Lösung dieses Problems ist leicht zu gewinnen; man überzeugt sich sofort, daß der Ansatz

$$(17) \quad \Phi(x, t) = a \cdot A \cdot \sin \frac{n}{a} x \cdot \cos nt + C \cos \frac{n}{a} x \cdot \cos nt$$

sowohl der Gleichung (13), als auch der Randbedingung (15) genügt; wenn C geeignet gewählt wird, läßt sich auch (16) erfüllen. Man findet für C :

$$(18) \quad C = A \cdot a \cdot \frac{\cos(n/a)}{\sin(n/a)},$$

womit die Lösung (17) die Gestalt annimmt:

$$\Phi(x, t) = a \cdot A \sin \frac{nx}{a} \cdot \cos nt + a \cdot A \cdot \frac{\cos(n/a)}{\sin(n/a)} \cdot \cos \frac{nx}{a} \cdot \cos nt,$$

oder:

$$(19) \quad \Phi(x, t) = \frac{A \cdot a}{\sin(n/a)} \cdot \cos \frac{n}{a} (x - 1) \cdot \cos nt.$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte von n , die nicht die Gleichung:

$$\sin \frac{n}{a} = 0$$

befriedigen, d. h. für alle Werte $n \neq \nu a \pi$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots \infty$). Würde n gleich einem solchen Werte, so würde die Amplitude der Schwingung unendlich, also die Lösung versagen. Dies liegt natürlich lediglich an der Vernachlässigung der Reibung, deren Einführung wir aber (es müßten die Differentialgleichungen für kompressible reibende Flüssigkeiten benutzt werden) zur Vermeidung von Komplikationen unterlassen wollen, zumal sachlich für unser Problem nichts gewonnen würde. Wir werden also im folgenden stets $n \neq \nu a \pi$ voraussetzen.

Da wir nach (19) $\Phi(x, t)$ im ganzen Rohre kennen, können wir auch den hydrodynamischen Druck berechnen, indem wir (14) anwenden; es ist also bei uns:

$$(20) \quad \log \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad p = p_0 e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}},$$

oder, wenn wir die Exponentialfunktion entwickeln und, da nach Voraussetzung $\partial \Phi / \partial t$ unendlich klein ist, mit dem ersten Gliede abbrechen, so folgt:

$$(21) \quad p = p_0 \left\{ 1 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\},$$

eine Gleichung, die die Lösung unseres Problems enthält, da der hydrodynamische Druck p durch (21) bis auf Größen erster Ordnung genau angegeben wird. Setzen wir nach (19) den Wert von $\partial \Phi / \partial t$ ein, so folgt:

$$(22) \quad p(x, t) = p_0 + \frac{p_0 A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \cos \frac{n(x-1)}{a} \cdot \sin nt.$$

Wir wollen den Druck für das feste Ende $x = 1$ berechnen. Dafür ergibt sich:

$$(23) \quad p(1, t) = p_0 + \frac{p_0 A n}{a \cdot \sin \frac{n}{a}} \cdot \sin nt,$$

und endlich wollen wir dessen Mittelwert für eine volle Periode bestimmen. So erhalten wir, da

$$\overline{p(1)} = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt$$

ist:

$$(24) \quad \overline{p(1)} = p_0,$$

d. h. in dem mit Schallenergie erfüllten Rohre ist im Mittel kein höherer Druck vorhanden, also ohne Schwingungen existieren würde. Ein Schalldruck, d. h. eine Differenz zwischen $\overline{p(1)}$ und p_0 existiert also nicht, sofern die Rechnung konsequent nur Glieder erster Ordnung berücksichtigt.

§ 4.

Wir wollen indessen jetzt in Gleichung (20), die wir (21) nur bis zum ersten Gliede entwickelten, das quadratische Glied noch mitnehmen. Ob dies statthaft ist, soll später diskutiert werden. Statt (21) folgt also:

$$(21a) \quad p = p_0 \left\{ 1 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2a^4} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right\},$$

und wenn man $\partial \Phi / \partial t$ einsetzt:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= p_0 + \frac{p_0 A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \cos \frac{n(x-1)}{a} \cdot \sin nt \\ &+ \frac{p_0}{2} \frac{A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \frac{n}{a}} \cdot \cos^2 \left[\frac{n(x-1)}{a} \right] \cdot \sin^2 nt, \end{aligned} \right.$$

oder, wenn wir wieder auf die Stelle $x = 1$ spezialisieren (wo wir uns irgend eine Vorrichtung zur Messung von p angebracht denken können):

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} p(1) &= p_0 + \frac{p_0 A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \sin nt \\ &+ \frac{1}{4} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} - \frac{1}{4} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \cos 2nt. \end{aligned} \right.$$

Bestimmen wir den Mittelwert durch Integration über eine Periode, so folgt dieses Mal:

$$(27) \quad \overline{p(1)} = p_0 + \frac{p_0 A^2 n^2}{4 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)};$$

also ergibt sich eine mittlere Druckerhöhung, der sogenannte Schalldruck:

$$(28) \quad \overline{p(1)} - p_0 = \frac{A^2 p_0 n^2}{4 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)},$$

oder, nach Gleichung (5), wenn die normale Dichte

$$h_0 = \frac{p_0}{a^2}$$

eingeführt wird:

$$(29) \quad \overline{p(1)} - p_0 = \frac{h_0 A^2 n^2}{4 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)}.$$

Dieser Wert ist aber, wie man sich leicht überzeugt, gleich der mittleren Energie pro Längeneinheit des Rohres, also genau der Wert, den Lord Rayleigh angibt. Wir wollen zunächst dieses Resultat in Verbindung setzen mit dem Auftreten von Kombinationstönen, um zu prüfen, inwieweit der Gedanke von Hrn. Waetzmann sich bewährt und inwieweit er ein neues Prinzip zur Erklärung der Kombinationstöne darstellt.

§ 5.

Zu diesem Zwecke knüpfen wir an den § 3 an, indem wir jetzt folgendes Randwertproblem behandeln:

Im ganzen Rohre gelte wieder die Gleichung:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0,$$

ferner für das Ende $x = 1$ die alte Gleichung (16):

$$(16) \quad \text{für } x = 1: \Phi'(1) = 0;$$

dagegen am Ende $x = 0$ die neue Bedingung:

$$(30) \quad \text{für } x = 0: \Phi'(0) = A \cdot n \cdot \cos nt + B \cdot m \cdot \cos mt,$$

d. h. wir leiten jetzt zwei Töne von den Frequenzen n und m in das Rohr hinein, damit die Gelegenheit zur Entstehung von Kombinationstönen gegeben ist. Unter der Voraussetzung, daß sowohl

$$n \neq \nu a \pi,$$

als auch

$$m \neq \nu a \pi$$

sind, ergibt sich die Lösung dieses Randwertproblems:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, t) = \\ \frac{Aa}{\sin\left(\frac{n}{a}\right)} \cdot \cos \frac{n(x-1)}{a} \cdot \cos nt + \frac{Ba}{\sin\left(\frac{m}{a}\right)} \cdot \cos \frac{m(x-1)}{a} \cdot \cos mt, \end{array} \right.$$

deren Richtigkeit leicht zu verifizieren ist. Setzen wir diesen Wert in die bis zum zweiten Gliede einschließlich entwickelte Gleichung (21a) ein, so folgt unmittelbar, wenn wir gleich für $x = 1$ spezialisieren:

$$p(1) = p_0 + \frac{p_0 A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \sin n t + \frac{1}{2} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \sin^2 n t$$

$$+ \frac{p_0 B m}{a \sin \frac{m}{a}} \cdot \sin m t + \frac{1}{2} \frac{p_0 B^2 m^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{m}{a} \right)} \cdot \sin^2 m t$$

$$+ \frac{p_0 A B n m}{a^2 \sin \frac{n}{a} \cdot \sin \frac{m}{a}} \cdot \sin n t \cdot \sin m t,$$

oder:

$$(32) \left\{ \begin{aligned} p(1) = p_0 + \frac{p_0 A n}{a \sin \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \sin n t + \frac{1}{4} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \\ - \frac{1}{4} \frac{p_0 A^2 n^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \cos 2 n t \\ + \frac{p_0 B m}{a \sin \frac{m}{a}} \cdot \sin m t + \frac{1}{4} \frac{p_0 B^2 m^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{m}{a} \right)} \\ - \frac{1}{4} \frac{p_0 B^2 m^2}{a^2 \sin^2 \left(\frac{m}{a} \right)} \cdot \cos 2 m t \\ + \frac{\frac{1}{2} p_0 A B n m}{a^2 \sin \left(\frac{n}{a} \right) \cdot \sin \left(\frac{m}{a} \right)} \left[\cos (n - m) t + \cos (n + m) t \right]. \end{aligned} \right.$$

Berechnet man für diesen Ausdruck wieder das Zeitmittel, so findet man für den Schalldruck $\overline{p(1)} - p_0$:

$$(33) \quad \overline{p(1)} - p_0 = \frac{h_0}{4} \frac{A^2 n^2}{\sin^2 \frac{n}{a}} + \frac{h_0}{4} \frac{B^2 m^2}{\sin^2 \left(\frac{m}{a} \right)},$$

wieder ganz analog wie bei Lord Rayleigh.

Für uns ist jedoch gerade Gleichung (32) wichtig, weil sie uns die am Ende $x = 1$ ausgeübte Kraft als Funktion der Zeit angibt. Man erkennt, daß außer den Frequenzen n und m , die wir am Ende $x = 0$ anbrachten, noch die Oktaven $2n$ und $2m$ sowie der Differenzton erster Ordnung $(n - m)$ und der Summationston erster Ordnung $(n + m)$ auftreten, die also, wenn wir am Ende $x = 1$ eine Membran anbringen, diese in Schwingungen versetzt, die nach der Theorie der erzwungenen Schwingungen zu behandeln sind. Wir gehen darauf nicht weiter ein. Jedenfalls sieht man, daß in der Membran auch Kombinationstöne auftreten.

§ 6.

Gegen die vorstehenden Betrachtungen kann und muß ein Einwand gemacht werden. In der Gleichung (13) für das Geschwindigkeitspotential haben wir die quadratischen und höheren Glieder gestrichen, dagegen in der Druckgleichung (14) bzw. (21a) beibehalten. Das ist, wie es scheint, eine Inkonssequenz, die der Rechtfertigung bedarf. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die Rayleighsche Ableitung, indem dieser für das Geschwindigkeitspotential eine Lösung der gewöhnlichen Wellengleichung (13) nimmt, bei der Druckgleichung aber die Genauigkeit weiter treibt. Dies scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein. Wir wollen nun sehen, was sich ergibt, wenn wir die quadratischen Glieder überall systematisch beibehalten.

Aus der allgemeinen Gleichung (16) folgt dann bei Abwesenheit äußerer Kräfte:

$$(34) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} = 0;$$

dazu tritt die Druckgleichung (8):

$$(35) \quad \log \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2.$$

Wir wollen (34) für die alten Randbedingungen lösen, also die Bedingungen vorschreiben:

$$(36) \quad \text{für } x = 0: \Phi'(0) = A n \cdot \cos n t;$$

$$(37) \quad \text{für } x = 1: \Phi'(1) = 0.$$

Die Glieder zweiter Ordnung werden dem Quadrate der Amplitude proportional sein; um dies zum Ausdruck zu bringen, wollen wir schreiben:

$$(38) \quad \Phi = A \cdot \Psi,$$

so daß an Stelle von (34), (35), (36), (37) die folgenden Gleichungen zu treten haben:

$$(39a) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2A \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} = 0,$$

$$(39b) \quad \log \left(\frac{p}{p_0} \right) = -\frac{A}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{A^2}{2a^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2,$$

$$(40) \quad \Psi'(0) = n \cdot \cos n t,$$

$$(41) \quad \Psi'(1) = 0.$$

Wäre in (39a) $A = 0$, so fielen wir auf unsere alte Lösung zurück; das legt den Ansatz nahe:

$$(42) \quad \Psi = \Psi_0 + A \cdot \Psi_1 + A^2 \Psi_2 + \dots,$$

wo Ψ_0 unsere alte Lösung für verschwindend kleines A ist. Die Randbedingungen (40) und (41) werden erfüllt, indem man setzt:

$$(43) \quad \begin{cases} \Psi_0'(0) = n \cdot \cos nt; & \Psi_1'(0) = \Psi_2'(0) = \dots = 0, \\ \Psi_0'(1) = \Psi_1'(1) = \Psi_2'(1) = \dots & = 0. \end{cases}$$

Setzen wir (42) in (39a) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} + A^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \dots \\ - a^2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} - a^2 A \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} - a^2 A^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} \dots \\ + 2A \left[\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} + A \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + A^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right] \\ \left[\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t \partial x} + A \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t \partial x} + A^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t \partial x} \dots \right] = 0, \end{aligned}$$

und wenn man die Koeffizienten gleicher Potenzen von A gleichsetzt, ergibt sich folgendes System von Gleichungen und Randbedingungen:

$$(44a) \quad \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} = 0; \quad \Psi_0'(1) = n \cdot \cos nt; \quad \Psi_0'(0) = 0;$$

$$(44b) \quad \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t \partial x}; \quad \Psi_1'(0) = \Psi_1'(1) = 0;$$

.....

Wir brechen mit der Gleichung für Ψ_1 ab, die ja den quadratischen Gliedern entspricht.

Für Ψ_0 haben wir aus Gleichung (19), wo nur gemäß (38) der Faktor A zu streichen ist:

$$(45) \quad \Psi_0(x, t) = \frac{a}{\sin\left(\frac{n}{a}\right)} \cdot \cos \frac{n(x-1)}{a} \cdot \cos nt.$$

Mit diesem Werte haben wir den in (44b) auf der rechten Seite auftretenden Ausdruck

$$-2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t \partial x}$$

zu bilden; das liefert:

$$(46) \quad -2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t \partial x} = \frac{n^3}{2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \left[1 - \cos \frac{2n(x-1)}{a} \right] \cdot \sin 2nt;$$

also lautet das jetzt zu lösende Problem nach (44b) und (46):

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} &= \frac{n^3}{2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \left[1 - \cos \frac{2n(x-1)}{a} \right] \cdot \sin 2nt, \\ \Psi_1'(0) &= \Psi_1'(1) = 0. \end{aligned} \right.$$

Das ist aber ein bekanntes Randwertproblem, nämlich das des an beiden Enden freischwingenden Stabes, dessen Lösung sofort hingeschrieben werden kann. Man findet¹⁾:

$$\Psi_1(x, t) = \frac{C_0}{\left(\frac{4n^2}{a^2} \right)} \cdot \sin 2nt + \sin 2nt \cdot \sum_v^{\infty} \frac{\sqrt{2} \cdot C_v}{\frac{4n^2}{a^2} - v^2 \pi^2} \cos v\pi x$$

oder

$$(48) \quad \Psi_1(x, t) = (\sqrt{2}) \sin 2nt \cdot \sum_v^{\infty} \frac{C_v}{\frac{4n^2}{a^2} - v^2 \pi^2} \cdot \cos v\pi x.$$

Dabei bedeutet die Klammer um $\sqrt{2}$, daß die Wurzel für $v = 0$ zu streichen ist.

C_v ist ein Fourierscher Koeffizient mit folgender Bedeutung:

$$C_v = \frac{(\sqrt{2}) \cdot n^3}{2 \cdot \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right) \cdot a^2} \cdot \int_0^1 \cos v\pi x \cdot \left\{ \cos \frac{2n}{a}(x-1) - 1 \right\} dx.$$

Kürzen wir ab:

$$(\sqrt{2}) \sum_v^{\infty} \frac{C_v \cdot \cos v\pi x}{\frac{4n^2}{a^2} - v^2 \pi^2} = U(x),$$

so folgt als Lösung für $\Psi_1(x, t)$:

$$(49) \quad \Psi_1'(x, t) = U(x) \cdot \sin 2nt,$$

also unter Rücksicht auf (38) und (43) für das Geschwindigkeitspotential Φ :

$$(50) \quad \Phi(x, t) = \frac{A \cdot a}{\sin \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \cos \frac{n}{a}(x-1) \cdot \cos nt + A^2 \cdot U(x) \cdot \sin 2nt.$$

1) Vgl. z. B. Cl. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik. Bd. I. p. 592ff. u. 661ff.

Wir erkennen also, daß die Berücksichtigung des quadratischen Gliedes in (34) das Auftreten der Oktave des ursprünglichen Tones mit sich bringt, in einer Stärke, die dem Quadrate der Amplitude des primären Tones proportional ist.¹⁾ Nach (35) ist nun:

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2,$$

oder:

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2}.$$

Entwickelt man bis zu den quadratischen Gliedern, so folgt:

$$(51) \quad p = p_0 \left\{ 1 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2a^2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \right\}.$$

Ausgerechnet gibt der Ausdruck auf der rechten Seite, wenn überall nur noch Quadrate von A berücksichtigt werden:

$$p = p_0 \left[1 + \frac{A n}{a \sin \frac{n}{a}} \cdot \cos \frac{n}{a} (x-1) \cdot \sin n t - \frac{2 n^2 A^2}{a^2} U(x) \cdot \cos 2 n t \right. \\ \left. - \frac{A^2 n^2}{2 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \sin^2 \frac{n}{a} (x-1) \cos^2 n t \right. \\ \left. + \frac{A^2 n^2}{2 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \cos^2 \frac{n(x-1)}{a} \cdot \sin^2 n t \right],$$

und wenn wir für $x = 1$ spezialisieren:

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} p(1) = p_0 \left[1 + \frac{A n}{a \sin \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \sin n t - \frac{2 n^2 A^2}{a^2} \cdot U(1) \cos 2 n t \right. \\ \left. + \frac{A^2 n^2}{2 a^2 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} \cdot \sin^2 n t \right]. \end{aligned} \right.$$

1) Würde man in Gl. (35) zwei Töne $A n \cdot \cos n t + B m \cos m t$ wirken lassen, so würden auch im Ausdruck von Φ Kombinationstöne auftreten, was auch durch die Überlegung erkannt wird, daß in der Differentialgleichung für Φ (34) ein quadratisches Glied auftritt. Auch Helmholtz hat diesen Sachverhalt bereits vollkommen klar erkannt, wie aus seiner Anmerkung p. 318 (l. c.) hervorgeht, die, wie es scheint, nicht die genügende Beachtung gefunden hat.

Bilden wir jetzt den Mittelwert für eine Periode, so folgt sofort das nicht von vornherein zu erwartende Resultat:

$$(53) \quad \overline{p(1)} = p_0 + \frac{p_0}{a^2} \frac{A^2 n^2}{4 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)} = p_0 + \frac{h_0 A^2 n^2}{4 \sin^2 \left(\frac{n}{a} \right)},$$

d. h. wir erhalten genau den nämlichen Wert des Schalldruckes wie in Gleichung (29). Die Vernachlässigung der quadratischen Glieder in der Differentialgleichung für Φ ist also gerechtfertigt.

Breslau, Physik. Inst. d. Univ., im März 1916.

(Eingegangen 21. Juli 1916.)

4. *Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation;* *von Friedrich Kottler.*

In meinen früheren Arbeiten¹⁾ habe ich die Frage der Beschleunigungsrelativität oder die Möglichkeit des Verborgenseins einer beschleunigten Bewegung diskutiert. Da diese Möglichkeit der bekannten Einsteinschen Äquivalenzhypothese zugrunde liegt, ergibt sich in Verfolg seines Gedankenganges eine Anwendung auf die Gravitation, allerdings eine sehr beengte, da meine erwähnten Arbeiten die Zulässigkeit der Beschleunigungsrelativität nur für eine einzige spezielle beschleunigte Bewegung ergeben haben, wenn anders man daraus ein Gravitationsfeld ableiten will, nämlich für die Fallbewegung.

Einstein hat seither die Äquivalenzhypothese aufgegeben. Die Gründe liegen im wesentlichen in einer besonderen Auffassung ihrer Ergebnisse durch ihn, die darauf hinausläuft, den Kräften des Gravitationsfeldes einen selbständigen Charakter zu geben, während *hier* die Bewegung im Gravitationsfeld als kräftefrei angesehen werden soll, also das Trägheitsgesetz abgeändert und die Gravitation als reine Trägheitserscheinung gedeutet wird. Diese Auffassung scheint mir die strenge Konsequenz der Äquivalenzhypothese und daher nur *gleichzeitig* mit ihr verwerflich.

Damit ist nun nicht gesagt, daß die Äquivalenzhypothese zu Recht bestehen muß. Es können sich anderweitige theoretische oder experimentelle Einwände gegen sie erheben lassen.

1) F. Kottler, Über die Raumzeitlinien der Minkowskischen Welt. Sitzungsber. Wiener Akad. 121. Oktober 1912. p. 1659f.

Relativitätsprinzip und beschleunigte Bewegung, Ann. d. Phys. 44. p. 701. 1914 (zitiert als I).

Fallende Bezugssysteme vom Standpunkte des Relativitätsprinzips. Ann. d. Phys. 45. p. 481. 1914 (zitiert als II).

Beschleunigungsrelative Bewegungen und die konforme Gruppe der Minkowskischen Welt. Sitzungsber. d. Wiener Akad. 1916 (zitiert als III).

Vorläufig scheinen mir solche nicht zu existieren, und daher ist der Versuch gerechtfertigt, die Äquivalenzhypothese noch einmal aufzunehmen und zu untersuchen, so beengt auch ihre Tragkraft sich gezeigt hat, was für eine Gravitationstheorie aus ihr zu folgern wäre.

Die vorläufigen Resultate beschränken sich auf den Fall des Feldes eines Massenpunktes; sie unterscheiden sich äußerlich, außer einer größeren Einfachheit, nur unwesentlich von denen der neuen Einsteinschen Theorie. Der wesentliche Unterschied ist ein prinzipieller: die erwähnte kinematische, nicht dynamische Auffassung der Gravitation.

Eine Weiterführung dieser Untersuchung ist dem Verfasser derzeit infolge militärischer Dienstleistung nicht möglich. Eben darum ist auch der Charakter dieser Veröffentlichung noch ein provisorischer.

Inhaltsübersicht.

1. Die Grenzen der Beschleunigungsrelativität nach den früheren Arbeiten des Verfassers. — 2. Die Einsteinsche Äquivalenzhypothese nur statt haft bei der (Hyperbel-) Fallbewegung. — 3. Die Einsteinschen Resultate bei der Fallbewegung, abgeleitet aus der Beschleunigungsrelativität (verallgemeinerte Lorentztransformation). Verschiedene Interpretation hier und bei Einstein. — 4. Ableitung des homogenen Schwerefeldes aus der Äquivalenz. Die Schwere als Trägheitserscheinung. — 5. Argumente für die Beibehaltung der Äquivalenzhypothese. — 6. Die Feldgleichung für das homogene Feld auf Grundlage der Äquivalenzhypothese. — 7. Zwei Hypothesen für die Ausdehnung auf allgemeinere Fälle; erstens: Isotropie des Feldes, zweitens: Euklidische Natur des Raumes. — 8. Das Feld des Massenpunktes auf Grundlage der Äquivalenzhypothese. Die Differentialgleichung des Feldes. Das homogene Feld als spezieller Fall. Andeutungen über noch allgemeinere Fälle. — 9. Vergleich mit der neuen Einsteinschen Theorie.

1. In den zitierten früheren Arbeiten des Verfassers war die Frage behandelt worden: Wie muß eine beschleunigte Bewegung vom Standpunkte des Einstein-Minkowskischen Relativitätsprinzips beschaffen sein, damit der mitbewegte Beobachter sich in Ruhe glauben kann?

Die gefundene Antwort war: Wenn Ruhe die Konstanz der Eigenkoordinaten aller Punkte des beschleunigten Bezugskörpers mit Rücksicht auf den (beliebigen) Standpunkt des Beobachters bedeutet, so können dies aus kinematischen

Gründen nur diejenigen Bewegungen sein, bei denen sich der Bezugskörper wie ein (quasi) starrer Körper verhält, nicht nur in jedem seiner Punkte, sondern in jeder Lage dieser Punkte. Die zugehörigen Weltlinien sind aber die Bahnen einer eingliedrigen orthogonalen Gruppe des Minkowskischen S_4 . Die zugehörigen mechanischen Bahnkurven sind, von Größen 2. Ordnung abgesehen, diejenigen mit konstanter Newtonscher Beschleunigung, also Fall, Wurf, gleichförmige Rotation und deren Kombinationen. Auch aus dynamischen Gründen, wenn verlangt wird, daß der Beobachter die auf ihn wirkende beschleunigende Kraft nicht erkennen soll, folgt, daß diese Kraft konstant, keiner Variation unterworfen sein soll, welches wieder auf die orthogonale Gruppe des S_4 führt.

Eine Verallgemeinerung ist nur denkbar, wenn unter Ruhe bloß die Konstanz der Visurwinkel der Punkte des beschleunigten Bezugskörpers, gesehen vom mitbewegten Beobachter, verstanden wird. Man erhält dann die Weltlinien einer eingliedrigen konformen Gruppe des Minkowskischen S_4 . Dynamischen Betrachtungen war dieser Fall nicht unterworfen worden.

2. Diese Theorie der „Beschleunigungsrelativität“ findet ihre Anwendung auf die Einsteinsche Äquivalenzhypothese¹⁾, Unter der Annahme, daß ein Beobachter auf einem beschleunigten Bezugskörper dieser seiner Bewegung nicht gewahr wird, also vielmehr seine (absolut) ruhende Umgebung unter der Wirkung eines Beschleunigungsfeldes glaubt, wird von Einstein die Hypothese aufgestellt: *Ein wirkliches Kraftfeld und ein solches scheinbares Beschleunigungsfeld sind physikalisch (also auch elektromagnetisch) völlig äquivalent.*

Einstein denkt hierbei in erster Linie an die Galileische, seither oft bestätigte Entdeckung, daß die Beschleunigung des homogenen Schwerfeldes an der Erde für alle Körper gleich ist. Wenn aber das homogene Schwerfeld nach dem obigem einem Beschleunigungsfeld äquivalent ist, dann ist dieses Galileische Gesetz nicht nur selbstverständlich, sondern auch grundlegend für eine tiefere Erfassung der bislang so rätselhaften Gravitation.

Aber die der Äquivalenzhypothese von Einstein zu-

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 35. p. 898. 1911.

grundegelegte Annahme, daß der Beobachter der beschleunigten Bewegung nicht gewahr werde, ist, nach dem unter 1. Erwähnten, auf dem Boden des Einstein-Minkowskischen Relativitätsprinzips im allgemeinen *nicht stichhaltig*. Während auf dem Boden des Newtonschen Relativitätsprinzips jede Beschleunigungsrelativität zulässig war, weil die Newtonsche Mechanik den starren Körper hat, ist dies hier nur mehr für die unter 1. betrachteten quasistarren Bewegungen zulässig. Insbesondere daher für den freien Fall oder dessen relativistische Analogie, die Hyperbelbewegung Borns, die ja mit ihm bis auf Größen 2. Ordnung identisch ist.

Da Einstein seine Betrachtungen auf den freien Fall, genau genommen sogar auf die Hyperbelbewegung, beschränkt¹⁾, wobei er allerdings Größen zweiter Ordnung vernachlässigt, bleiben daher diese Betrachtungen, die ihn bekanntlich zur Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerfeld führen, auch vom Standpunkte Minkowskis unanfechtbar. Unzulässig ist nur die von Einstein implizite postulierte Beschleunigungsrelativität für andere beschleunigten Bewegungen, eine Behauptung, die sich in seinen späteren Arbeiten wiederholt, ohne daß freilich Anwendungen von ihr gemacht würden.

3. Da denn die Beschleunigungsrelativität wenigstens bei der Hyperbelbewegung exakt statthat, so interessieren wegen der fundamentalen Bedeutung auch der so eingegengten Äquivalenzhypothese für eine Theorie der Gravitation die exakten Resultate. Diese in der Arbeit II des Verfassers angegebenen sind kurz die folgenden:

Sei γ die (Minkowskische) Beschleunigung des beschleunigten Bezugskörpers entlang der positiven Z-Achse, seien $x' y' z' t'$ Koordinaten und Zeit des mitbewegten Beobachters, $x y z t$ die des ruhenden Beobachters, so bestehen die Gleichungen, welche hier der Lorentztransformation entsprechen:

$$(1) \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ c^2/\gamma + z = (c^2/\gamma + z') \cosh \frac{\gamma t'}{c} \\ ct = (c^2/\gamma + z') \sinh \frac{\gamma t'}{c} \end{cases}$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 38. p. 355. 1912. Vgl. insbesondere § 1, Einleitung.

Vernachlässigt man hier $(\gamma t')^2$ gegen c^2 , so findet man hieraus wieder die Einsteinschen Formeln.¹⁾

Weiter folgt exakt: An Stelle des Bogenelements

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

der Minkowskischen Welt, tritt hier

$$(2a) \quad ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c'^2 dt'^2,$$

wobei

$$(2b) \quad c' = c + \gamma/c \cdot z'$$

und

$$ds' = ds.$$

Die „Lichtgeschwindigkeit“ c' im mitbewegten System ist also keine Invariante mehr.

Endlich folgt: Die Bewegungsgleichungen eines im ruhenden System kräftefreien, materiellen Punktes, dessen Ruheenergie E_0 sei, werden im mitbewegten System, wenn

$$d\sigma^2 = -ds^2 = -ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

der zeitartige Bogen längs der Weltlinie des Punktes ist:

$$(3) \quad \begin{cases} E_0 \frac{d^2 x'}{d\sigma^2} & = 0, \\ E_0 \frac{d^2 y'}{d\sigma^2} & = 0, \\ E_0 \frac{d^2 z'}{d\sigma^2} + E_0 \frac{\gamma}{c} \left(c + \frac{\gamma}{c} z' \right) \left(\frac{dt'}{d\sigma} \right)^2 & = 0, \\ E_0 \frac{d}{d\sigma} \left[\left(c + \frac{\gamma}{c} z' \right)^2 \frac{dt'}{d\sigma} \right] & = 0, \end{cases}$$

woraus natürlich folgt, daß die Bahn im gestrichenen System keine Gerade, sondern infolge der *scheinbaren* Beschleunigung $-\gamma$ eine Fall- oder Wurfbahn (von Größen 2. Ordnung abgesehen) wird.

Auch diese Resultate finden sich schon bei Einstein. Nur gibt Einstein den Gleichungen (3) eine *andere Form* und eine *andere Interpretation*.

Eine *andere Form*²⁾: Einstein führt die Masse m_0 statt der Energie E_0 ein und die Eigenzeit τ' an Stelle des Bogens σ .

1) l. c. p. 359. Gleichungen (4).

2) Von der Dimensionsänderung um c bei Einstein wird, da unwesentlich, hier nicht gesprochen.

Die Masse ist aber, da sie von der Lichtgeschwindigkeit c abhängt, keine Invariante oder Kovariante, ebensowenig wie die Eigenzeit τ' , da ja $d\sigma = c' d\tau'$. Wenn physikalische Bedeutung in der Minkowskischen Mechanik aber nur den bezüglich eines ds^2 invarianten (kovarianten) Bildungen zukommt, müssen wir dies auch in der hier angestrebten verallgemeinerten Mechanik verlangen. Die Masse als grundlegende physikalische Konstante besteht daher nicht mehr, da sie vom Feld abhängt. Die Ruheenergie E_0 hingegen, d. i. die innere Energie des Massenpunktes, wenn er in einem von jedem Felde freien Raume ruht, besteht fort als physikalische Konstante.

Eine andere Interpretation: Einstein setzt nach dem Vorgange Lagranges die Größe

$$- E_0 \frac{\gamma}{c} \left(c + \frac{\gamma}{c} z' \right) \left(\frac{dt'}{d\sigma} \right)^2,$$

die zufolge der vierten Gleichung (3) (sogenannte Erhaltung der Energie)¹⁾ mit A als Integrationskonstanten (Dimension $\text{gr cm}^3 \text{sec}^{-3}$) geschrieben werden kann

$$- \frac{A^2}{E_0} \frac{1}{\sigma^3} \frac{\partial \sigma'}{\partial x'}$$

gleich einer „Kraft“ des scheinbaren Feldes auf den Massenpunkt. Hier wird diese Größe als scheinbare Kraft im Sinne der d'Alembertschen Zusatzkräfte, der Führungsbeschleunigungen, der Zentrifugalkräfte, Coriolisschen Kräfte usw. usw. der klassischen Mechanik, d. i. rein kinematisch aufgefaßt, eine selbständige dynamische Existenz kommt ihr nicht zu; die linke Seite der Bewegungsgleichungen ist *unvollständig* ohne diese Größe. Dann folgt: (3) *sind die Bewegungsgleichungen für den kräftefreien Massenpunkt im bewegten System.*

4. Die Anwendungen der sub 3 dargelegten Resultate auf die Theorie des homogenen Schwerfeldes zu machen, gestattet dann die Einsteinsche Äquivalenzhypothese. Es folgt die Lichtkrümmung im Schwerfeld gemäß (2b), wobei man wegen

$$\Phi = \gamma z',$$

1) Von einer solchen ist hier, strenge genommen, nicht zu reden. Erhalten bleibt nicht die Energie $E' = m'c'^2$, sondern $A = m'c'^2$.

wo Φ das Newtonsche Potential des Feldes, schreiben kann:

$$(4) \quad c' = c + \frac{\gamma}{c} z' = c + \frac{\Phi}{c},$$

wo dann c etwa der Wert $(c')_{z'=0}$.

Die sub 3 erwähnte Verschiedenheit der hiesigen Interpretation von der Einsteinschen hat dann eine kinematische an Stelle der dynamischen Auffassung der Schwere zur Folge, d. h. an Stelle des Kraftfeldes tritt eine Abänderung des Galileischen Trägheitsgesetzes; nicht mehr gleichförmig und geradlinig bewegt sich der kräftefreie Punkt, sondern krummlinig und ungleichförmig vermöge (3). So paradox es scheint: erst dies scheint die konsequente Fassung der Einsteinschen Äquivalenz! In der Tat, wenn die Ursache der Gleichheit der Schwerebeschleunigung für alle Massen kinematisch ist, so muß die Schwere selbst kinematischen Ursprungs, d. i. Trägheitserscheinung, sein! Und die Erfahrung legt diese Anschauung doch so nahe: Der Mangel der Dispersion, der Fortpflanzungserscheinungen usw. bei der Gravitation, man möchte sagen das Unenergetische an ihr (wann sah man je Gravitationsenergie in irgend andere Energieformen verwandelt?), all dies verliert erst so das Rätselhafte.

Dann aber verlieren die Begriffe Potential, Spannungen, Kraft usw. des Schwerfeldes ihre *physikalische Bedeutung*, und dies kommt auch durch die *nicht kovariante* Form der von Einstein für diese postulierten Ausdrücke zum Vorschein. Gleichzeitig verschwindet die von Einstein¹⁾ gegen seine eigene Äquivalenzhypothese erhobene Schwierigkeit, da diese seiner dynamischen Auffassung entspringt.

5. Im Verfolg dieser dynamischen Auffassung hat bekanntlich Einstein die Äquivalenzhypothese und insbesondere die Folgerung (4) aus dieser aufgegeben und ist zu einer Theorie der Gravitation gelangt, bei welcher bloß die Abänderung des Minkowskischen ds^2 durch das Schwerfeld beibehalten, gleichzeitig auch auf die allgemeinste Form erhoben wurde. Die hierbei von ihm postulierte Kovarianz bezüglich des neuen

$$(5) \quad ds^2 = \sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 38. p. 452f. 1912.

soll mit der Beschleunigungsrelativität zusammenhängen. Von einem Minkowskischen Gesichtspunkte ist dies zunächst nur möglich, wenn das ds^2 euklidisch, d. i. auf die Form

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

mit konstantem c transformierbar ist, d. i. wenn alle Riemannsymbole verschwinden. Ist dies erfüllt, so gibt es, wie wir aus 1. entnehmen, nur die Hyperbelbewegung, welche sich der Einsteinschen Beschleunigungsrelativität fügt. Die allgemeine Beschleunigungsrelativität gibt es daher, wenigstens von einem Minkowskischen Gesichtspunkte, nicht. Auch scheint es, daß die Einsteinsche Kovarianz der physikalischen Größen bezüglich (5) nichts mit einer Beschleunigungsrelativität, sondern mit der alten Lorentzschen Geschwindigkeitsrelativität zu tun hat, insofern eine (von Ort zu Ort, von Zeit zu Zeit variierende) Translation ohne Einfluß auf die physikalischen Gesetze bleiben muß.¹⁾

Scheint so die Beschleunigungsrelativität endgültig erledigt und ohne physikalische Bedeutung, so gibt es doch eine Erwägung, welche das vollständige Fallenlassen der Äquivalenzhypothese, d. i. genau gesprochen der Gleichungen (1) bis (3) für die Hyperbelbewegung, bis auf weiteres noch nicht angezeigt erscheinen läßt. Ist sie doch nichts anderes als der Versuch, die Lorentztransformation auf beschleunigte Systeme auszudehnen. Und wie diese für das Studium der translatorisch bewegten Systeme von der größten Fruchtbarkeit war, indem sie z. B. den großartigen Zusammenhang zwischen Spannungen, Energie, Impuls und Energiestrom, d. i. die allgemeine Trägheit der Energie u. dgl. m., aufdeckte, ließe sich von einer Beschleunigungsrelativität, die durch die Erfahrung gestützt wäre, etwas Ähnliches für die beschleunigten Systeme und daher für das Gravitationsfeld erwarten. Die Gleichheit von träger und schwerer Masse geht allerdings nicht allein aus der Äquivalenzhypothese hervor. Sie ist zufolge 4. die Folge einer Abänderung des Trägheitsgesetzes, indem an Stelle des Minkowskischen ds^2 ein solches wie (5) tritt. Auch die Auffassung der Gravitation als Trägheitserscheinung ist nicht an die Äquivalenzhypothese geknüpft.

1) Um dies einzusehen, mache man die Lokaltransformation

$$(ds')_0 = \sum (g_{ik})_0 (dx_i)_0 (dx_k)_0 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 - c_0^2 dt_0^2$$

Was diese vielmehr auszeichnet, ist, daß sie heuristischen Wert hat und einen exakten, wenn auch noch so bescheidenen Zugang zur Theorie der Gravitation eröffnet, während die neuere Einsteinsche Theorie zu anderen, nicht so evidenten Hypothesen greifen muß.

Da also die Äquivalenzhypothese weder durch Theorie noch Erfahrung bislang widerlegt ist, andererseits ihre Evidenz und ihr heuristischer Wert unbestritten ist, scheint es nicht uninteressant, sie in der Richtung weiter zu verfolgen, die jetzt die Einsteinschen Untersuchungen eingeschlagen haben.¹⁾ Das ist: *Wie bestimmen die Massen des Feldes die Koeffizienten des ds^2 ?*

6. Zunächst untersuchen wir von diesem Gesichtspunkte aus das einzige Feld, das uns die Äquivalenzhypothese zugänglich macht, d. i. das homogene statische Feld, dem das Bogenelement

$$(6a) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

mit

$$(6b) \quad c = c_0 + \frac{\gamma}{c_0} z$$

entspricht. Wie aus der Theorie der Differentialinvarianten wohlbekannt ist, hat man allgemein für ein

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k$$

die Christoffelschen Dreiindizesymbole

$$\left[\begin{smallmatrix} i & k \\ h \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_h} \right),$$

ferner die Riemannschen Vierindizesymbole

$$(ikmn) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x_i \partial x_n} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_n} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x_i \partial x_m} \right) + \sum_{r,s=1}^4 g^{(rs)} \left(\left[\begin{smallmatrix} i & n \\ r \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} k & m \\ s \end{smallmatrix} \right] - \left[\begin{smallmatrix} i & m \\ r \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} k & n \\ s \end{smallmatrix} \right] \right),$$

wobei $g^{(rs)}$ die zu g_{rs} reziproke Form ist, also gleich der in der Determinante

$$g = |g_{ik}| \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

zu g_{rs} adjungierten Unterdeterminante, gebrochen durch g .

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49. p. 769. 1916.

Die Riemannschen Vierindizesymbole, deren Verschwinden die euklidische Natur des ds^2 festlegt, sind nun Kovarianten 4. Ordnung¹⁾, welche aus den g_{ik} und deren ersten bzw. zweiten Differentialquotienten zusammengesetzt sind.

Mit Einstein²⁾ bilden wir aus diesen Kovarianten 4. Ordnung solche 2. Ordnung:

$$B_{ik} = \sum_{r,s=1}^4 g^{(rs)}(i r s k).$$

Es gilt

$$B_{ik} = B_{ki}$$

wegen der bekannten Eigenschaften des Riemannsymbols $(i r s k) = (k s r i)$ und $g^{(rs)} = g^{(sr)}$.

Dies angewendet auf ein Feld der Lichtgeschwindigkeit c , wo diese nur Funktion der Koordinate z sein möge, also

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2(z) dt^2$$

liefert, wenn $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = it$ genommen werden,

$$(1212) = (1313) = (2323) = 0 \}$$

$$(1213) = (1223) = (1323) = 0 \}$$

$$(1214) = (1224) = (1234) = (1314) = (1324) = (1334) = (2324) = (2334) = 0$$

$$(1414) = (2424) = 0 \quad (3434) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2(c^2)}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial(c^2)}{\partial x} \right)^2 = -c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

$$(1424) = (1434) = (2434) = 0.$$

Die Forderung, daß das ds^2 ein Minkowskisches, daher euklidisch sein soll, liefert dann wieder

$$\frac{d^2 c}{dx^2} = 0$$

oder

$$c = c_0 + \frac{\gamma}{c_0} z,$$

die bekannte Form, die die Äquivalenzhypothese ergeben hat.

1) Vgl. F. Kottler, Raumzeitlinien der Minkowskischen Welt. Sitzungsber. Wiener Akad. d. Wiss. 1912.

2) A. Einstein, l. c. p. 801.

Dabei wissen wir¹⁾, daß sich die Massen in sehr weiter Entfernung in der Richtung der negativen z befinden, ferner daß

$$z > -\frac{c_0^2}{\gamma}$$

sein muß, welche Bedingung eben das Herankommen an die Massen ausschließt.

7. Wir entnehmen also der Äquivalenzhypothese manchen wertvollen Fingerzeig für unsere Aufgabe. Zunächst wird das homogene Feld durch ein homogenes Lichtgeschwindigkeitsfeld ausgedrückt; ferner ist bei Annäherung an die Massen eine gewisse Schranke gezogen, in welcher die Lichtgeschwindigkeit verschwindet. Endlich genügt die Lichtgeschwindigkeit gewissen kovarianten Differentialgleichungen, wodurch auch der Forderung des Relativitätsprinzips, daß nur Kovariantes physikalische Bedeutung haben soll, genügt wird.

Bevor wir die naheliegende Verallgemeinerung auf das Feld eines Massenpunktes unternehmen, stellen wir zwei Überlegungen an:

Erstens: Welches sind die übrigen beschleunigungsrelativen Felder? Aus III. entnehmen wir, daß ihr ds^2 von der Form ist

$$(7) \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2g_{14} dx d\bar{t} + 2g_{24} dy d\bar{t} \\ &\quad + 2g_{34} dz d\bar{t} + g_{44} (d\bar{t})^2, \end{aligned} \right.$$

wobei, wie man leicht ableitet, folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $g_{14} g_{24} g_{34} g_{44}$ frei von t (stationär),
2. $\frac{\partial g_{i4}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{k4}}{\partial x_i} = 0$
3. $\frac{\partial g_{i4}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{k4}}{\partial x_i} = \text{const.}$
4. \sqrt{g} linear in xyz .

Die letzteren Bedingungen hängen mit dem orthogonalen Charakter der zugrundeliegenden infinitesimalen Transformation des S_4 zusammen. Es verschwinden dann wieder die sämtlichen Riemannsymbole. Das Bogenelement ds^2 ist daher minkowskisch oder euklidisch.

1. und 4. sind uns vertraut von dem sub 6 betrachteten Fall des der Hyperbelbewegung entsprechenden Feldes. Da-

1) F. Kottler, II p. 490.

gegen kommen dort 2. und 3. natürlich nicht vor, weil $g_{14} g_{24} g_{34}$ die Relativgeschwindigkeit gegen den Beobachter symbolisieren und in unserem fallenden Bezugssystem keine solche vorhanden war. Diese Relativgeschwindigkeit, die nach I entweder von einer Rotation oder von einer Wurfbewegung o. dgl. des Bezugssystems herrührt, beeinflusst auch das Feld: die Lichtgeschwindigkeit ist nicht nur von Ort zu Ort, sondern an einem und demselben Ort auch mit der Richtung veränderlich. Das Feld ist *anisotrop*.

Wir haben keinen Anlaß, das Gravitationsfeld anisotrop anzunehmen, wenigstens in den einfachsten Fällen.

Wir schließen damit die Fälle $g_{14} \neq 0$ $g_{24} \neq 0$ $g_{34} \neq 0$ aus.

Zweitens: Der (dreidimensionale) Raum des Beobachters ist euklidisch. Denn ihm entspricht die Bogen:

$$d x^2 + d y^2 + d z^2.$$

Es ist dies allen übrigen Hypothesen der Physik konform und erscheint eine Änderung dieser Annahme, also eine Beeinflussung der Natur des *Raumes* durch das Feld vorläufig nicht evident, da doch das Feld immer bloß in *zeitlichen* Veränderungen seinen Ausdruck findet, also auf *mechanischem*, nicht *geometrischem* Gebiete. Wir nehmen mithin konform der Äquivalenzhypothese bei kartesischen Koordinaten:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$$

und lassen nur g_{44} von den Koordinaten $x y z$ abhängen. Von t wird g_{44} für ein stationäres Feld frei sein.

8. Jetzt können wir den hinausgeschobenen Schritt tun, nämlich die Verallgemeinerung des Resultates der Äquivalenzhypothese, welches für das homogene Feld gilt, für das radialsymmetrische eines Massenpunktes. Wir schreiben in Polarkoordinaten gemäß (7):

$$(7a) \quad d s^2 = d r^2 + r^2 d \vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d \varphi^2 - c^2(r) d t^2$$

oder mit

$$x_1 = r, \quad x_2 = \vartheta, \quad x_3 = \varphi, \quad x_4 = i t$$

und

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2 = x_1^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta = x_1^2 \sin^2 x_2, \quad g_{44} = c^2(x_1)$$

in der Form

$$d s^2 = g_{11} d x_1^2 + g_{22} d x_2^2 + g_{33} d x_3^2 + g_{44} d x_4^2.$$

Dieses $d s^2$ kann offenbar nicht mehr minkowskisch, also euklidisch sein. Alle Riemannsymbole verschwinden sicher nicht. Wir bilden diese 20 Riemannsymbole.

Die erste Gruppe, 6 an Zahl, enthält den Index 4 *nicht*. Sie verschwinden, da sie hier identisch mit den Riemannsymbolen des dreidimensionalen „Raumes“ des Beobachters sind, vermöge der vorausgesetzten euklidischen Natur des letzteren, sämtlich.

Die zweite Gruppe, 8 an Zahl, enthält den Index 4 *einmal*. Sie verschwinden sämtlich, da $g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$, d. h. das Feld isotrop ist.

Die dritte Gruppe, 6 an Zahl, enthält den Index 4 *zweimal*. Von diesen verschwinden 3 und es bleiben übrig:

$$(1414) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (c^2)}{\partial r^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\partial (c^2)}{\partial r} \right)^2 = -c \frac{\partial^2 c}{\partial r^2},$$

$$(2424) = -\frac{1}{4} \frac{\partial (r^2)}{\partial r} \cdot \frac{\partial (c^2)}{\partial r} = -c r \frac{\partial c}{\partial r},$$

$$(3434) = -\frac{1}{4} \frac{\partial (r^2 \sin^2 \vartheta)}{\partial r} \frac{\partial (c^2)}{\partial r} = -c r \sin^2 \vartheta \frac{\partial c}{\partial r}.$$

Bildet man die B_{ik} , so folgt, wenn man für

$$\frac{\partial c}{\partial r} = c', \quad \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = c''$$

schreibt:

$$B_{11} = \frac{1}{g_{44}} (1441) = \frac{1}{c} c'',$$

$$B_{22} = \frac{1}{g_{44}} (2442) = \frac{r}{c} c',$$

$$B_{33} = \frac{1}{g_{44}} (3443) = \frac{r \sin^2 \vartheta}{c} c',$$

$$B_{44} = \frac{1}{g_{11}} (4114) + \frac{1}{g_{22}} (4224) + \frac{1}{g_{33}} (4334) = c \left(c' + \frac{2}{r} c' \right) = c \Delta c,$$

$$B_{12} = B_{13} = \dots = B_{34} = 0.$$

Hierin ist Δ der dreidimensionale Laplacesche Operator für eine Funktion, die bloß von r abhängt.

Wir bilden endlich die Invariante

$$B = \sum_{i,k} g^{(ik)} B_{ik} = \frac{1}{g_{11}} B_{11} + \frac{1}{g_{22}} B_{22} + \frac{1}{g_{33}} B_{33} + \frac{1}{g_{44}} B_{44} = \frac{2}{c} \Delta c.$$

Nunmehr haben wir den notwendigen Apparat beisammen. Schon aus dem Ansatz (2b):

$$c' = c + \frac{r z'}{c}$$

der geschrieben werden kann:

$$c' = c + \frac{\Phi}{c},$$

hatte Einstein seinerzeit die Lichtgeschwindigkeit, von Konstanten abgesehen, als dem Newtonschen Potential proportional gefolgert, um dann in der Folge diese einfache Annahme zugunsten seiner späteren Theorie aufzugeben. Auf dem Boden der Äquivalenzhypothese ist dies auch die naheliegendste mit (2b) vereinbare Verallgemeinerung. Wir setzen daher die Differentialgleichung an:

$$(8) \quad B = \sum_{i,k} g^{(ik)} B_{ik} = \sum_{i,k,r,s} g^{(ik)} g^{(rs)} (i r s k) = \frac{2}{c} \Delta c = 0,$$

welche invariante Form hat. Sie liefert tatsächlich mit den Integrationsbedingungen:

1. c soll im Unendlichen konstant gleich c_∞ sein,
2. c hat den Pol $r = 0$; in der Nähe von $r = 0$ gibt es eine „Schranke“, wo $c = 0$ wird, die verlangte Form für c :

$$(7b) \quad c = c_\infty \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

gültig für $r > a$.

Daß diese Form (7b) die Form (2b) enthält, ist leicht einzusehen. Man setze r genügend groß gegen a und schreibe

$$r = r_0 + z,$$

wo z eine gegen r_0 kleine Größe. Es kommt:

$$c = c_\infty \left(1 - \frac{a}{r}\right) = c_\infty \left(1 - \frac{a}{r_0 + z}\right) = c_\infty \left(1 - \frac{a}{r_0} + \frac{a z}{r_0^2} + \dots\right).$$

Weiter ist für $r = r_0$

$$c_0 = c_\infty \left(1 - \frac{a}{r_0}\right),$$

daher

$$c = c_0 + \frac{a c_\infty}{r_0^2} z + \dots$$

Da aber offenbar

$$(9) \quad \Phi = - \frac{\alpha c_{\infty}^2}{r_0}$$

gesetzt werden darf, so hat man wegen

$$\gamma = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{\alpha c_{\infty}^2}{r^2}$$

die Form

$$c = c_0 + \frac{\gamma x}{c_{\infty}} + \dots,$$

wofür näherungsweise

$$c = c_0 + \frac{\gamma x}{c_0}$$

geschrieben werden kann, welches die gewünschte Form hat.

Aus (9) folgt die Größenordnung von α für das Feld eines Atoms. Es ist ja auch

$$\Phi = - \frac{k m}{r},$$

worin $k = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ gr}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$ die Newtonsche Gravitationskonstante, $m = 10^{-24} \text{ gr}$ sind. Es folgt¹⁾ mit $c_{\infty} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$:

$$\alpha = \frac{k m}{c_{\infty}^2} = 7,4 \cdot 10^{-53} \text{ cm}.$$

Die „Schranke“ $r = \alpha$ ist jedenfalls eine physikalisch unendlich kleine Größe.²⁾

Wir heben zum Schlusse noch hervor, daß der Massenpunkt entsprechend den kinematisch-geometrischen Grundlagen unserer Theorie nur *mathematisch als Pol*, nicht wie in Einsteins dynamischer Theorie *physikalisch als Masse* auftritt. Die Masse erscheint auf dem Boden dieser unserer aus der Äquivalenzhypothese abgeleiteten Theorie überhaupt nur als eine *Unstetigkeit in Raum und Zeit*.

Ins Innere der Masse zu gehen, haben wir sinngemäß

1) Vgl. H. Reissner, Ann. d. Phys. 50. p. 115. 1916.

2) Die früher erwähnte Schranke $x > -\frac{c_0^2}{\gamma} = -\left(\frac{r-\alpha}{\alpha}\right)^2$ gilt natürlich bloß für das *homogene* Feld.

wegen der Schranke nicht.¹⁾ Die Erweiterungen dieser Theorie müssen daher die Differentialgleichung

$$B = 0$$

annehmen, mit den Integrationsbedingungen:

1. $c_{\infty} = \text{const.}$,
2. jeder Massenpunkt ein Pol von c ,

wobei die Massen in Massenpunkte aufzulösen sind.

Die Begriffe Masse, Dichte usw. können natürlich in dieser rein geometrischen Theorie keine Rolle spielen. Die Dichte ist ja übrigens keine Invariante oder Kovariante, hat daher vom Standpunkte des Relativitätsprinzips keine absolute physikalische Bedeutung. Etwas der Poissonschen Theorie Entsprechendes dürfen wir daher hier nicht erwarten.

Es ist nicht Zweck dieser Zeilen, die angedeutete Erweiterung der Theorie durchzuführen, ja auch nur ihre Möglichkeit zu postulieren, zumal ihre eindeutige Folgerung aus der Äquivalenzhypothese nicht feststeht. Vielmehr soll dies alles vielleicht in einer späteren Arbeit diskutiert werden.

9. Es obliegt uns endlich, unsere Resultate mit denen der Einsteinschen Theorie in ihrer letzten Fassung zu vergleichen.

Man weiß, daß Einstein ein ganz allgemeines

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k$$

an die Spitze stellt. Der „Raum“, d. i.

$$\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k$$

ist bei ihm nicht mehr euklidisch, sondern erscheint durch das Feld verändert. Das Feld findet daher seinen Ausdruck in gewissermaßen 10 Potentialen $g_{11}, g_{12}, \dots, g_{44}$. Sie genügen im materiefreien Raum Verallgemeinerungen der Laplace'schen Gleichung, nämlich den 10 Differentialgleichungen

$$B_{ik} = B_{ki} = \sum_{r,s} g^{(rs)} (i r s k) = 0 \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Diese B_{ik} mit $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m}$ multipliziert und nach i, k summiert

$$\sum_{i,k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m} B_{ik} = 0 \quad m = 1, 2, 3, 4$$

1) Damit fallen die vom Verfasser am Schlusse seiner Arbeit II gegebenen Ausführungen, welche zum Bykschen Atommodell führten.

liefern Einstein vier Gleichungen, die er aus formalen Gründen als Impulsenergiesatz deutet, wobei er als „Spannungen“ des „Gravitationsfeldes“ gewisse Größen erhält, welche quadratisch sind in den Differentialquotienten $\partial g_{ik}/\partial x_m$ und natürlich *nicht kovariant* sein können. Nach Einführung dieser Spannungen des Feldes erhält Einstein die Differentialgleichungen des Feldes für die von Materie erfüllten Räume, indem er einfach den formalen Grundsatz festhält, daß die Spannungen der Materie und des Feldes nicht additiv superponieren.

Endlich soll noch der Fall des Massenpunktes nach Einstein-Schwarzschild angeführt werden. Man erhält¹⁾

$$ds^2 = dr^2 + h^2 d\vartheta^2 + h^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 - c_\infty^2 \left(\frac{dh}{dr} \right)^2 dt^2,$$

wobei

$$r = \sqrt{h^2 - 2\alpha h} + \alpha \ln(h - \alpha + \sqrt{h^2 - 2\alpha h})$$

und α die schon oben erwähnte (vgl. 8) Konstante

$$\alpha = \frac{km}{c_\infty^2}$$

ist. Wäre $\alpha = 0$, so hätte man $h = r$ und

$$c = c_\infty \frac{dh}{dr} = c_\infty \frac{\sqrt{h^2 - 2\alpha h}}{h}$$

würde konstant; man hätte das gravitationsfreie Feld, d. i. den gewöhnlichen Minkowskischen Fall. Vernachlässigt man α^2 gegen h^2 , so hat man:

$$r = h - \alpha + \alpha \ln 2h,$$

$$c = c_\infty \left(1 - \frac{\alpha}{h} \right) + \dots = c_\infty \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) + \dots$$

Unsere Resultate unterscheiden sich daher nur um Größen von der Ordnung α^2/h^2 von denen Einsteins, wenigstens bezüglich der Lichtgeschwindigkeit. Dagegen ist ein Unterschied von der Ordnung α/h in der geometrischen Natur des Raumes vorhanden.

Die numerischen Unterschiede sind also physikalisch verschwindend. Dagegen bestehen prinzipielle Unterschiede. Diese nochmals zusammenfassend, hat man:

1) H. Reissner, l. c. p. 120.

1. Die Äquivalenzhypothese verlangt eine Abänderung des Trägheitsgesetzes durch gewisse *scheinbare* Kräfte des Feldes. Einstein deutet diese als *wirkliche* Kräfte des Feldes, behält dafür das Galileische Trägheitsgesetz, muß aber auf die kovariante Form (also das Minkowskische Prinzip der Physik) im Ausdruck dieser „Kräfte“ verzichten.

2. Bei Einstein folgt aus der Annahme: alle $B_{ik} = 0$ (während hier nur $\sum g^{(k)} B_{ik} = 0$ sein durfte), daß die Äquivalenzhypothese für ihn überhaupt nicht mehr zu Recht besteht.

3. Einstein gibt die euklidische Natur des Raumes im Gravitationsfeld auf.

4. Bei Einstein wird im allgemeinen das Feld anisotrop.

(Eingegangen 17. Juli 1916.)

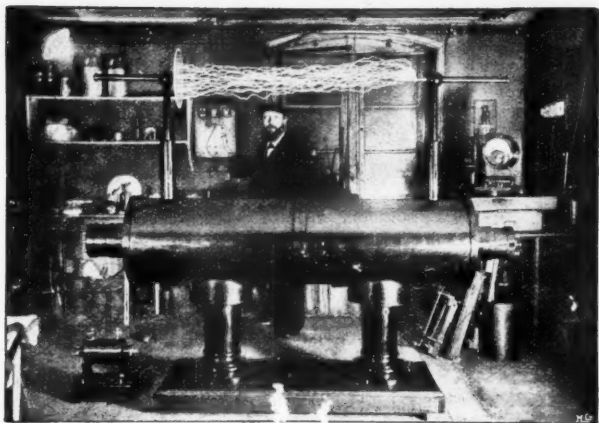
tion.

ung
des
des,
auf
der

= 0
qui-
teht.
s im

rop.





Induktorium 120 cm Funkenlänge, betätigt mit unserem Collimator-Unterbrecher, Expositions-
dauer 1 Sekunde. Links unten: Induktorium 10 cm Funkenlänge.

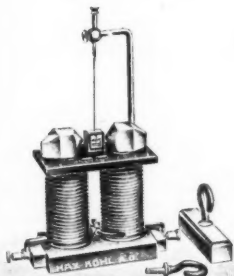
Unsere Induktorien eignen sich hervorragend zum Laden
großer Kapazitäten, sowohl mit Wechselstrom ohne Unter-
brecher, als mit unterbrochenem Gleichstrom.

Fr. Klingelfuss & Co., Basel.

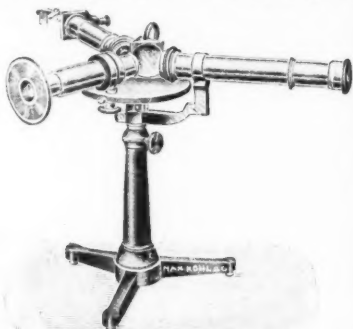
Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital M. 1600000

**Physikalische Apparate :: Funken-Induktoren
:: Projektions-Apparate in gediegener Ausführung ::**



62280. Elektromagnet nach Weinhold
für para- u. diamagnetische Versuche.



54097. Schulspektralapparat.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

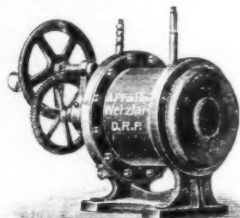
Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

**Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen
und für wissenschaftliche Zwecke.**

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

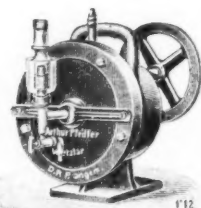
System Pfeiffer, D. R. P.

System Gaede, D. R. P.
angemeldet

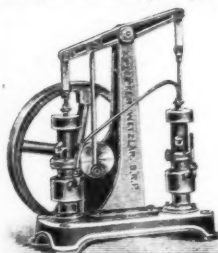


Hochvakuum-
Apparate
zur
Demonstration
und zu
wissenschaftlichen
Untersuchungen.

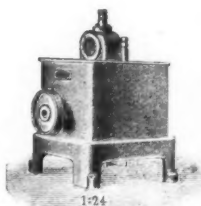
Neu-
konstruktionen
nach Angabe.



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.
Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.



Alle Arten von
Luftpumpen:
Trockene rotierende
Luftpumpen,
Trockene Schieber-
luftpumpen,
Quecksilberluftpumpen
aller Systeme,
Kompressionsluftpumpen.



**Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4-1000 cm/m
Funkenlänge**

Eingetragene



Fabrik-Marke



**Induktoren
mit Demon-
strations-
schaltung.**
Alle
Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Ernst Leitz, Wetzlar

Optische Werke

Zweiggeschäfte:

Berlin NW
Luisenstraße 45

New-York
30 East 18th Street



Liliputbogenlampe

mit Hand- oder Uhrwerk-Regulierung
und rechtwinkliger Kohlenstellung

Beste, billigste und zuverlässigste
Lichtquelle f. physikalische Versuche

Liste A 45 D kostenfrei

Verlag von JOHANN AMBROSIOUS BARTH in Leipzig.

Sobien erschien:

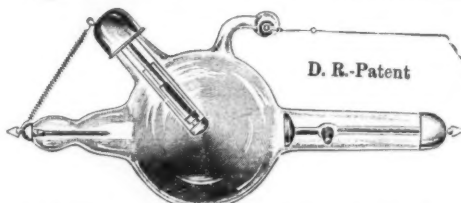
Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie

von Prof. Dr. A. Einstein in Berlin.

64 Seiten. 1916. M. 2.40.

Seit Jahren ist der Verfasser aufgefordert worden, seine mit dem Namen Relativitätstheorie bezeichneten physikalischen Anschauungen zusammenfassend niederzulegen. Die vorliegende Broschüre enthält diese gewünschte Zusammenstellung seiner neuesten Forschungen auf diesem Gebiete in knappster Darstellung und gibt allen Physikern, sowie allen denjenigen, die sich für die Fortschritte der Physik interessieren, den gewünschten Überblick. Der Verfasser hat alle nötigen, bei dem Physiker nicht als bekannt voraussetzenden mathematischen Hilfsmittel in möglichst einfacher und durchsichtiger Weise entwickelt.

R. Burger & Co., Berlin N. 4, Chausseestrasse 8. Spezial-Fabrik für Vakuumröhren.



Goldene Medaille
1904 St. Louis

Ehrendiplom
1906 Mailand

Silberne Medaille
1907 Rom

Illustrierter
Katalog
gratis und
franko.

Central-Röntgenröhre für Starkströme mit intensiver Aussenkühlung.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Die Lichtelektrizität.

von

Arthur Llewelyn Hughes.

Deutsch von Dr. Max Ikié.

192 Seiten mit 40 Figuren. 1915. M. 5.—, geb. M. 6.—.

Es handelt sich hier um die Übersetzung eines amerikanischen Buches, das eine sehr geschickte Zusammenfassung der neuesten Forschungen enthält, die auf diesem modernsten Gebiete der Physik angestellt worden sind.

Der Verfasser hat dabei alle Formen der Ionisation durch Licht, sei es in festen, in flüssigen oder in gasförmigen Körpern, in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig

Die mechanistischen Grundgesetze des Lebens

von

Dr. Adolf Cohen-Kysper

in Hamburg

VIII, 373 Seiten. 1914. M. 7.—, geb. M. 8.—

Die chemo-physikalische Erklärung des Lebens war von falschen Voraussetzungen ausgegangen und mußte versagen. Der Vitalismus, als extreme Reaktion, konnte nicht befriedigen. Ein noch unbeschrittener Weg dagegen führte zum Ziele: Die Darstellung auf der Grundlage der Mechanik. Ein einziges Prinzip, das Prinzip des Ausgleichs, beherrscht danach das Leben im gesamten Umfang des Begriffs, die historische Entwicklung der Lebewesen, wie die Entwicklung des Individuums und seine körperliche und seelische Lebensbetätigung. Auf der Grundlage dieses Prinzips sind die Erscheinungen des Lebens in zureichender Weise in das allgemeine Naturgeschehen einzureihen.

Radioaktivität und Kontinuität

von

Sir Oliver Lodge

Präsident der Universität Birmingham

Zwei Vorträge:

- I. Die Entdeckung der Radioaktivität und deren Einfluß auf die Entwicklung der Physikalischen Wissenschaft.

Becquerel-Gedächtnisrede,
gehalten am 17. Oktober 1912 vor der Chemical Society.

II. Kontinuität

Eröffnungsrede,
gehalten auf der Versammlung der British Association zu Birmingham

IV, 217 Seiten. 1914. M. 5.—, geb. M. 6.—

Diese beiden Vorträge des großen englischen Physikers behandeln Fragen, die weit über den Kreis der Fachgenossen hinaus das lebhafteste Interesse für sich in Anspruch nehmen müssen. Im ersten Vortrag legt der Verfasser dar, wie die Entdeckung der Radioaktivität auf unser naturwissenschaftliches Denken bestimmend wirkt. Im zweiten Vortrag legt der Verfasser sein physikalisches Glaubensbekenntnis ab. Sicherlich werden die interessanten Ausführungen des Verfassers und seine vielseitigen Darlegungen Anhänger und Gegner in gleichem Maße fesseln und anregen.

E. Leybold's Nachfolger

Cöln

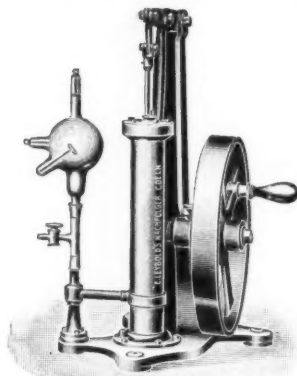
Neu!

Gaede-Kolbenpumpe

D. R. P.

(Vergl. Phys. Ztsch. XIV, S. 1238—1240)

Luftleere 0,00005 mm Hg



zeichnet sich durch **mechanische** und **physikalische Unverwüstlichkeit** aus. Infolge ihrer **steten Betriebsbereitschaft** und weitgehenden **Unempfindlichkeit gegen Wasserdämpfe** ist sie sowohl zur Vorführung einfacher Versuche wie für solche Demonstrationen geeignet, welche hohe Vakua erfordern.

Neu!

Gaede-Diffusionspumpe

D. R. P.

(Vergl. Annalen der Physik 46. 1915, S. 357—392.)

Alleinige Inseratenannahme durch: Gelsdorf & Co., Eberswalde.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

